

Формулы преобразования основных тригонометрических функций кратных углов

Куспаев Н. Д.

*Куспаев Нургалий Джумагалиевич / Kuspaev Nurgaliy Djumagalievich - инженер-строитель,
РГП Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, г. Актюбе, Республика Казахстан*

Аннотация: тригонометрические функции кратных углов дают широкую возможность решения некоторых алгебраических уравнений высших степеней, которые до настоящего времени считаются неразрешимыми. А приближенные вычисления действительных значений алгебраических уравнений высших степеней, предлагаемые в учебных пособиях, очень трудоемки. Кроме того, тригонометрические функции кратных углов применяются в формулах рядов Фурье, которые выражают взаимосвязи между различными формулировками трансцендентных и других видов функций различной сложности с алгебраическими многочленами высших степеней. В существующих учебниках и справочниках даются формулы преобразования только для трехкратных углов. В данной статье приводятся коэффициенты преобразования тригонометрических функций $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ более высоких кратностей и даются правила заполнения соответствующих таблиц.

Ключевые слова: кратные углы, синусы и косинусы, формулы преобразования, тождественные равенства, формулы приведения, аргумент.

Согласно курса математического анализа с использованием формул дифференциального исчисления любую сложную функцию можно преобразовать в ряды Фурье, выраженных формулой:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi); [1. \text{стр. } 609] \langle 1 \rangle$$

где n принимает натуральные значения, начиная с единицы.

Во всех учебниках по элементарной математике приводятся формулы преобразования только для трехкратных углов, например [2. стр. 34]

Таблица косинусов кратных углов

Для приведения к единому аргументу и к форме записи тригонометрических функций в виде алгебраических многочленов введем подстановку:

$$X = 2 \cos \varphi ; ; \quad \langle 2 \rangle$$

$$\cos 2\varphi = (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2 = 2(\cos \varphi)^2 - 1;$$

$$\text{или } 2\cos 2\varphi = 4(\cos \varphi)^2 - 2 = X^2 - 2 ;$$

каждый раз прибавляя значения φ с использованием формулы сложения углов, получаем окончательные выражения:

$$\left. \begin{aligned} 2\cos 3\varphi &= X^3 - 3X; \\ 2\cos 4\varphi &= X^4 - 4X^2 + 2; \\ 2\cos 5\varphi &= X^5 - 5X^3 + 5X; \\ 2\cos 6\varphi &= X^6 - 6X^4 + 4X^2 - 2; \\ 2\cos 7\varphi &= X^7 - 7X^5 + 14X^3 - 7X; \\ 2\cos 8\varphi &= X^8 - 8X^6 + 20X^4 - 16X^2 + 2; \end{aligned} \right\} \langle 3 \rangle$$

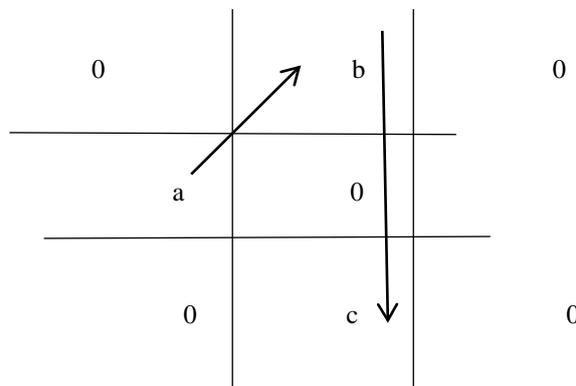


Рис. 1. Схема заполнения таблиц коэффициентов косинусов и синусов кратных углов

Используя коэффициенты при неизвестных, заполним таблицу № 1 для косинусов кратных углов. Формула заполнения ячеек:

$$c = a - b; \quad \langle 4 \rangle$$

Правила заполнения таблицы:

- старший коэффициент численно равен единице;
 - показатели степени постоянно понижается на две единицы, начиная с показателя, равному кратности угла;
 - знаки степенного ряда чередуются;
 - для четных величин кратности угла свободные члены ± 2 , с учетом чередования знаков по сравнению со знаком предыдущего члена степенного ряда;
 - для нечетных величин кратности свободные члены разложения отсутствуют;
- Приведем таблицу коэффициентов разложения для $Z=2\cos n\varphi$. (таблица № 1)

Таблица 1. Таблица коэффициентов степенного ряда разложения косинусов кратных углов
 $Z = 2\cos n\varphi$ при $X = 2\cos\varphi$

Показатель кратности, n	X^0	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	X^7	X^8	X^9	X^{10}	X^{11}
N = 0	2											
N = 1	0	1										
N = 2	-2	0	1									
N = 3	0	-3	0	1								
N = 4	2	0	-4	0	1							
N = 5	0	5	0	-5	0	1						
N = 6	-2	0	9	0	-6	0	1					
N = 7	0	-7	0	14	0	-7	0	1				
N = 8	2	0	-16	0	20	0	-8	0	1			
N = 9	0	9	0	-30	0	27	0	-9	0	1		
N = 10	-2	0	25	0	-50	0	35	0	-10	0	1	
N = 11	0	-11	0	55	0	-77	0	44	0	-11	0	1
N = 12	2	0	-36	0	105	0	-112	0	54	0	-12	0
N = 13	0	13	0	-91	0	182	0	-156	0	65	0	-13

Используя таблицу, можем написать формулу разложения для кратности $n = 8$:

$$2\cos 8\varphi = X^8 - 8X^6 + 20X^4 - 16X^2 + 2; \langle 5 \rangle$$

Особенности разложения в ряд синусов кратных углов. При равенстве $X = 2\cos\varphi$ имеем $2\sin\varphi = \sqrt{4 - X^2}$.. При помощи синусов суммы углов имеем тождественные равенства.

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin\varphi; \\ \sin 2\varphi &= \sin\varphi * 2\cos\varphi; \\ \sin 3\varphi &= \sin\varphi * (4\cos^2\varphi - 1); \\ \sin 4\varphi &= \sin\varphi * (8\cos^3\varphi - 4\cos\varphi); \langle 6 \rangle \\ \sin 5\varphi &= \sin\varphi * (16\cos^4\varphi - 12\cos^2\varphi + 1); \\ \sin 6\varphi &= \sin\varphi * (32\cos^5\varphi - 32\cos^3\varphi + 6\cos\varphi); \\ \sin 7\varphi &= \sin\varphi * (64\cos^6\varphi - 80\cos^4\varphi + 24\cos^2\varphi - 1) \dots \end{aligned}$$

Продолжая определение синусов кратных углов, видим определенную закономерность изменения коэффициентов степенного ряда, а именно:

Все синусы имеют одинаковые множители

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{4-X^2}}{2} ..$$

Кроме того:

- высшая степень переменного на единицу меньше кратности угла;
- коэффициенты при старшем члене разложения равна единице
- знаки соседних членов степенного ряда чередуются;
- свободные члены степенного ряда четной кратности равны нулю;
- свободные члены для нечетных кратностей равны ± 1 , в зависимости от знака соседнего члена разложения;

Схема подсчета коэффициентов соответствует рис. 1, и формула подсчета такая же, как подсчет коэффициентов кратных косинусов. При помощи указанных правил заполним таблицу коэффициентов разложения в степенной ряд синусов кратных углов.

Эти приведенные таблицы подсчета коэффициентов разложения в степенные ряды основных тригонометрических функций (синуса и косинуса) в дальнейшем дадут возможность из алгебраических многочленов получать тригонометрическую форму записей, и в следующей статье мы более подробно остановимся на этой теме.

Например:

$$\begin{aligned} & X^5 + 4X^3 - 1,5X^2 + X - 0,7 = \\ & = (X^5 - 5X^3 + 5X) + (9X^3 - 27X) - (1,5X^2 - 3,0) + X - 3,7 = \\ & = 2\cos 5\varphi + 18\cos 3\varphi - 3\cos 2\varphi + 2\cos \varphi - 3,7 = F(x) \end{aligned}$$

Приведем таблицу подсчета коэффициентов синуса кратных углов.(см. Таблицу № 2).

Таблица 2. Таблица коэффициентов разложения в степенной ряд синусов кратных углов $Y = \frac{2 \sin n\varphi}{\sqrt{4-X^2}}$, при $X = 2\cos \varphi$.

Показатели кратности углов, n	X^0	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	X^7	X^8	X^9	X^{10}	X^{11}
N = 1	1											
N = 2	0	1										
N = 3	-1	0	1									
N = 4	0	-2	0	1								
N = 5	1	0	-3	0	1							
N = 6	0	3	0	-4	0	1						
N = 7	-1	0	6	0	-5	0	1					
N = 8	0	-4	0	10	0	-6	0	1				
N = 9	1	0	-10	0	15	0	-7	0	1			
N = 10	0	5	0	-20	0	21	0	-8	0	1		
N = 11	-1	0	15	0	-35	0	28	0	-9	0	1	
N = 12	0	-6	0	35	0	-56	0	36	0	-10	0	1
N = 13	1	0	-21	0	70	0	-84	0	45	0	-11	0
N = 14	0	7	0	-56	0	126	0	-120	0	55	0	-12
N = 15	-1	0	28	0	-126	0	210	0	-165	0	66	0
N = 16	0	-8	0	84	0		0	330	0		0	78

Литература

1. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. Москва, 1965 г., с. 870.
2. Справочник по элементарной математике, Москва, 1972 г., с. 284.
3. Кенжебаев К. К. Сборник задач по математическому анализу. г. Актобе, 2014 г.
4. Аналитическая формула определения длин трисектрисс. Журнал «Проблемы науки». Август 2016 г.
5. Теоремы о биссектрисах и трисектрисах треугольника. Журнал «Проблемы науки». Август 2016 г.
6. Свойства лучей, исходящих из данной точки под равными углами. Журнал «Проблемы науки». Сентябрь 2016 г.