Теоремы о биссектрисах и трисектрисах треугольников
Куспаев Н. Д.

Куспаев Нургалий Джумагалиевич / Kuspaev Nurgaliy Djumagalievish - инженер–строитель,
Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Республика Казахстан

Аннотация: *в данной статье впервые приводятся теоремы о биссектрисах и трисектрисах треугольников с доказательствами, которые ранее не приводились в научных журналах и имеют важные значения при выполнении эскизных работ по начертательной геометрии или при графических решениях задач в различных отраслях математики. Приведенные здесь теоремы могут использоваться при делении на произвольные углы, окружности, в целом на множества равных частей. Алгоритмы деления окружности на равные части являются универсальными по сравнению с теми методами, которые изложены в учебниках и методических указаниях по черчению и начертательной геометрии.*
Ключевые слова: *внутренние углы треугольников, биссектрисы и трисектрисы внутренних углов, лучи и прямые ,перпендикуляры.*

Теорема 1:Длина биссектрисы угла C треугольника $\Delta\, ABC$ со сторонами a, bи c равна:

$$\beta_c = \sqrt{\frac{ab(a+b+C)(A+B-C)}{(a+b)^2}} = \sqrt{ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}}\ ; \quad (1)\ [2. c. 74]$$

после возведения в квадрат имеем:

$$\beta_c^2 = \text{ab} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} \quad (2)$$

Теорема 2: Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону пропорционально длинам ,прилегающих сторон треугольника.

При доказательстве теоремы для треугольника Δ ABC проведем биссектрису угла C (β_c), которая пересекает противоположную сторону в точке D. Используя вершину C и две его боковые стороны, строим два равнобоких треугольника Δ BCQ и Δ ACN, которые являются подобными треугольниками (Рис. 1).

Применяем свойств прямой, пересекающей две параллельные прямые. Из подобия треугольников Δ BKC и Δ AFC:

Δ BKD и Δ ADF отсюда

$$\left.\begin{aligned} \frac{BC}{AC} &= \frac{BK}{AF}, \\ \frac{BK}{BD} &= \frac{DF}{AD}\ ; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

следовательно

$$\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}$$ теорема доказана.

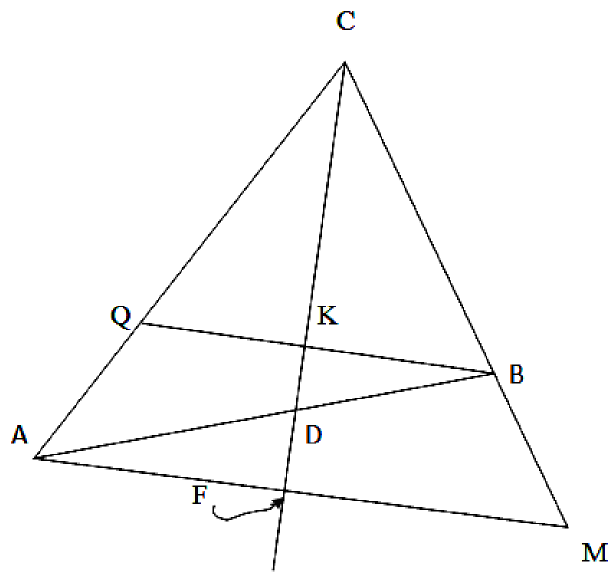

Рис. 1. Схема для доказательства теоремы о биссектрисе

Приведем ранее неизвестные теоремы о трисектрисах треугольника.

Теорема 3. Трисектрисы двух смежных углов треугольника пересекаются в точках, принадлежащих биссектрисе третьего угла.

Доказательство: Построим на рис. 2 треугольник $\Delta\, ABC$ с трисектрисами смежных углов у основания при углах A и B, а также ранее известными методами построим биссектрису вершины C.

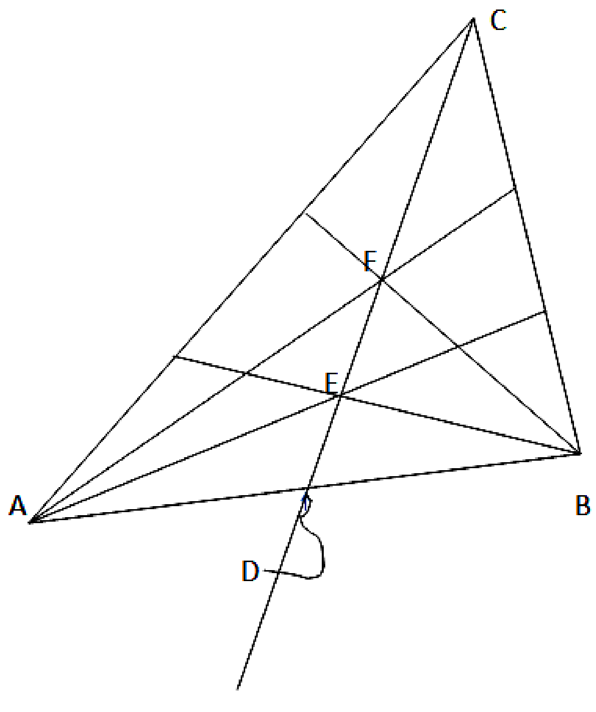

Рис. 2. Схема точек пересечения трисектрисс двух смежных углов треугольника $\Delta\, ABC$.

Если углы $< ACD = < DCD = {}^{\gamma}/_{2}$,, $< A = 3\alpha$; $< B = 3\beta$;

тогда внутренние углы в треугольниках $\Delta\, ACD$ и $\Delta\, BCD$ соответственно

$$\left.\begin{array}{l}\text{для } \Delta \text{ ACD имеют значения } 3\alpha, {}^{\gamma}/_{2} \ и\ 180° - {}^{\gamma}/_{2} - 3\alpha, \\ \text{для } \Delta \text{ BCD имеют значения } 3\beta, {}^{\gamma}/_{2} \ и\ 180° - {}^{\gamma}/_{2} - 3\beta \ .. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Для указанных треугольников внешние углы при вершине C, соответственно

$< ACN =< BCM = 180° - {}^{\gamma}/_{2}$ .. (5)

В нижеперечисленных треугольниках внутренние углы:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\, AEF \ < AEF - 180° - 2\alpha + {}^{\gamma}/_{2}\,, \\ \Delta\, BEF \ < BEF - 180° - 2\beta + {}^{\gamma}/_{2}\,, \\ \Delta\, AED < AED = 2\alpha - {}^{\gamma}/_{2}\,, \Delta\, BED \ < BED = 2\beta - {}^{\gamma}/_{2}\,. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Тогда в точке D пересечения биссектрисыβ_cс основанием треугольника внутренние углы:

$$\left.\begin{array}{l} < ADE = 180° - 3\alpha - {}^{\gamma}/_{2} = 3\beta + {}^{\gamma}/_{2}; \\ < BDE = 180° - 3\beta - {}^{\gamma}/_{2} = 3\alpha + {}^{\gamma}/_{2}\,. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Отсюда в точке сумма углов

$< ADE + < BDE = \left(3\beta + {}^{\gamma}/_{2} + 3\alpha + {}^{\gamma}/_{2}\right) = 180°.$ (8)

Можно также доказать следующую теорему, которая поможет при помощи циркуля и линейки разделить окружность (в частности любые углы) на равные n частей.

Теорема 4: Биссектриса внутреннего угла треугольника является множеством точек пересечения лучей, исходящих из вершин двух других смежных углов и делящих эти углы на одинаковые число частей.

Лемма: Лучи, делящие смежные углы на одинаковые или пропорциональные части, пересекаются в точках, принадлежащих биссектрисе третьего угла (Рис. 3).

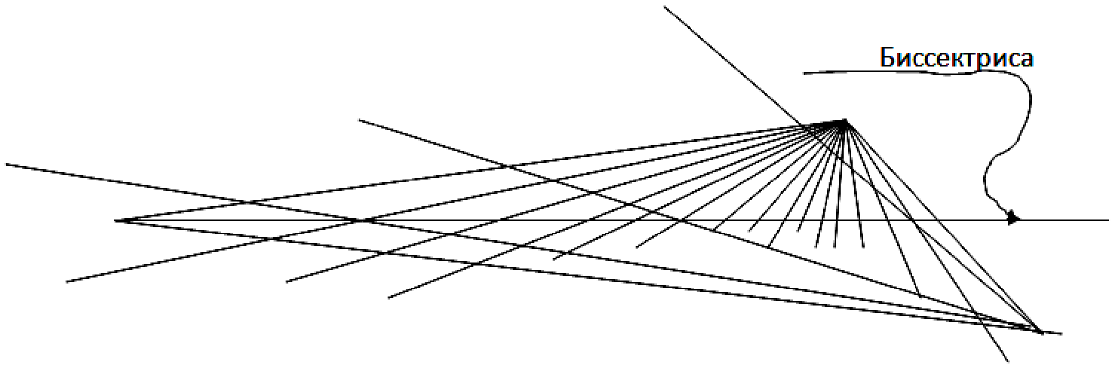

Рис. 3. Свойства точек биссектрисы

При помощи деления угла $\varphi = 120°$ на три равные части мы получаем правила деления окружности на девять равных частей, или путем деления угла , равного $\varphi = {}^{\pi}/_{3}$ при помощи циркуля и линейки мы получим графическое решение приведенного кубического уравнения

$$X^3 - \ 3X - 1 = 0\,;$$

Графическое решение этого уравнения до настоящего времени считается невозможным $[3.c.147]$,, также невозможным считается графическое деление окружности на девять равных частей.

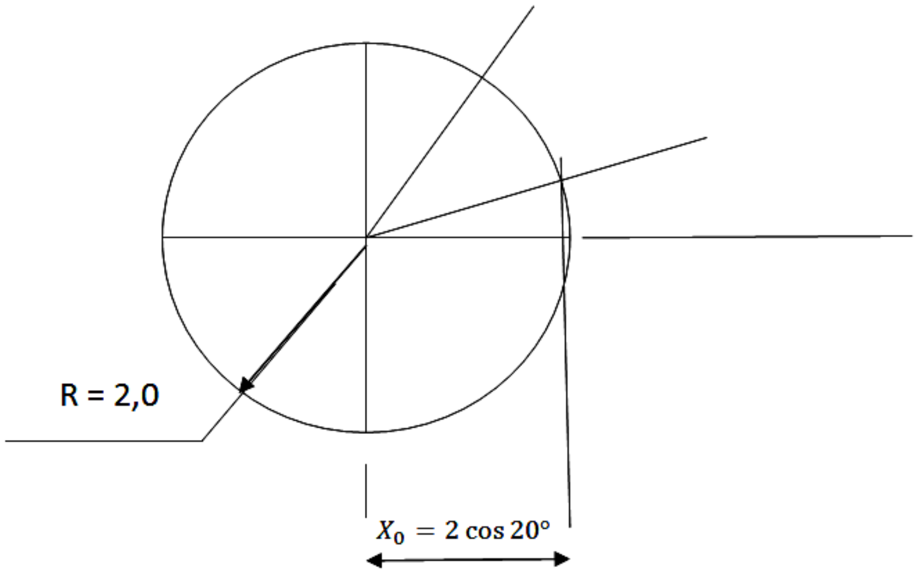

Рис. 4. Схема графического решения приведенных кубических уравнений

Подробное решение рассматривается отдельной главой.

Литература

1. *Выгодский М. Я.* «Справочник по высшей математике». Москва, 1965 г., стр. 870.
2. Справочник по элементарной математике, М., 1972 г.,стр. 284.
3. *Окунев Л. Я.* «Высшая алгебра», М., 1978 т..стр. 426.