Графические решения кубических уравнений

Куспаев Н. Д.[1], Куразов Т. А.[2]

[1]Куспаев Нургалий Джумагалиевич / Kuspaev Nurgaliy Djumagalievish - инженер-строитель, административно-хозяйственное управление;
[2]Куразов Туретай Аманжолович / Kurazov Turetai Amangolovish – профессор, кафедра физики конденсированного состояния, физико-математический факультет, РГП Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова, г. Актобе, Республика Казахстан

Аннотация: *со времен великих математиков Абеля и Галуа в течение четырех столетий утверждалось о невозможности графической интерпретации корней кубических уравнений, то есть не были разработаны алгоритмы построения корней уравнений третьей степени, хотя по формуле Кардано корни приведенных уравнений выражаются кубическими радикалами. Согласно теории Абеля и Галуа, любое действительное число, выражаемое радикалами, можно построить при помощи циркуля и линейки. В данной статье мы полностью доказываем это утверждение. Приведен пример использования кубических уравнений при решении задач по физике.*

Ключевые слова: *корни уравнений, радикалы, разрешимость, действительные и комплексные числа, деление углов, полярный угол, емкостные и индуктивные сопротивления, колебательный контур.*

Рассмотрим решение приведенных кубических уравнений вида:

$$X^3 + pX + q = 0\,; \qquad (1)$$

А) При $p = 0$ имеем

$X = \sqrt[3]{-q}$, где $-q = \alpha + \beta i$ комплексное число

Используем формулу Муавра-Лапласа [$3., стр. 597$] для нахождения корня

$$\sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[3]{r}\,(\cos\frac{\varphi+k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi+k\pi}{3}); \qquad (2)$$

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \text{ здесь } r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad (3)$$

гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами α, β (модуль подкоренного комплексного числа). В предыдущих статьях мы приводили правила деления угла на три части $[1,]$, а также правила определения кубического корня

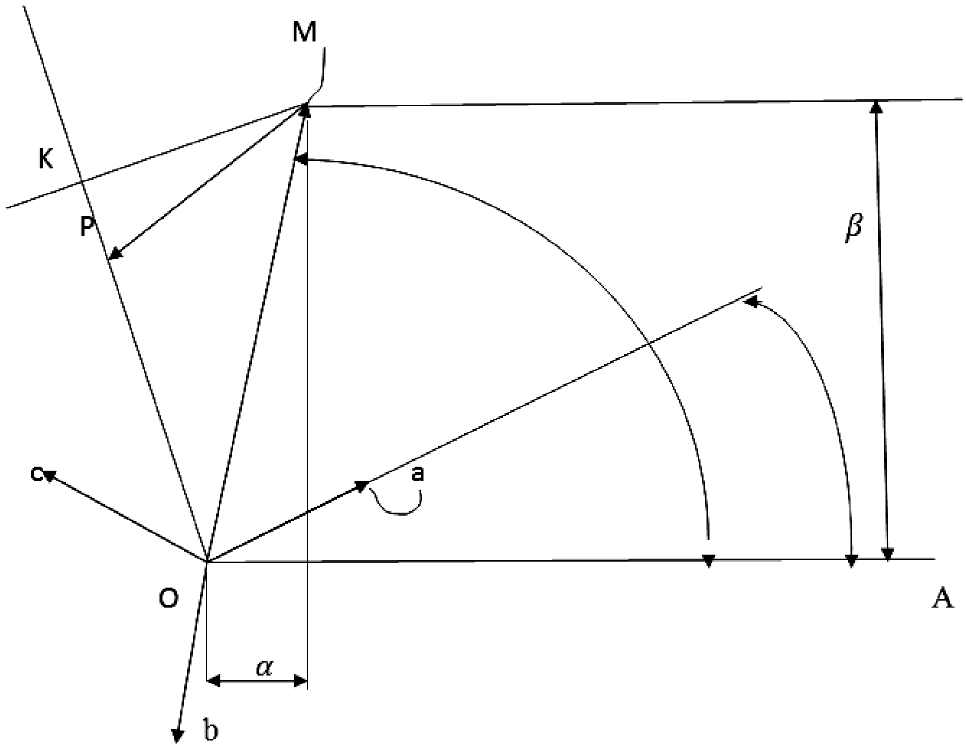

Рис. 1. Схема решения кубического бинома

ОМ – вектор, определяющий подкоренное комплексное число.

Треугольник $\Delta\, OMK$ прямоугольный МК = 1,0; ОК = $\sqrt{(OM)^2 - 1}$

МР – трисектриса острого угла М этого же треугольника.

МР = $\sqrt[3]{OM}$ согласно $[2, стр.]$

Угол $< AOM$ делится на три равные части по методу, изложенному в предыдущем номере журнала [1] .

Решениями заданного уравнения (1) являются комплексные числа:

X_1 = Oa с модулем $|Oa|$ = $|MP|$ и полярным углом $< AOa = \frac{\varphi}{3}$

X_2 = Ob и X_3= Oc модули которых также равны по длине с трисектрисой MP, а полярные углы соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} &< AOc = \frac{\pi}{3} + 120°; \\ &< AOb = \frac{\pi}{3} + 240°. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

B) при $p \neq 0$ корни уравнения (5) находятся по формуле Кардано [3, стр. 147]

$$X_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; \qquad (5)$$

В формуле (5)значение, стоящее под квадратным корнем называется дискриминантом приведенного кубического уравнения, и в зависимости от его знака определяется количество действительных корней.

При нулевом дискриминанте

D = $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$; Согласно курсу «Высшей алгебры», [3., *стр.* 147 − 149] приведенное кубическое уравнение (1)имеет три действительных корня

$$X_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \text{ и } X_2 = X_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \qquad (6)$$

Графическое определение кубических корней рассмотрено в статье, опубликованной в прошлом номере журнала [2., *стр.*]. Здесь мы приведем правила определения кубического корня из числа $\left|{}^{q}/_{2}\right|$ (если это число меньше единицы, то мы его предварительно умножим на любое число, взятое в третьей степени, чтобы получилось значение

$q\alpha^3/_2 > 1{,}0$)

При положительных значениях дискриминанта:

D = $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ так же, применяя метод определения кубического корня при помощи прямоугольного треугольника, находятся корни из каждого слагаемого и путем сложения отрезков находится один из корней X_1, затем, используя деление многочленов, переходим к решению квадратного уравнения.

$$X^3 + pX + q = (X - X_1)(X^2 + aX + b) = 0 \qquad (7)$$

При отрицательных значениях дискриминанта приведенного кубического уравнения, уравнение имеет три действительных корня, которые можно построить графически при помощи циркуля и линейки.

В этом случае корни заданного уравнения (1) соответственно равны:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 2\left|\sqrt[3]{r}\right| \cos\frac{\varphi}{3}; \\ X_2 &= 2\left|\sqrt[3]{r}\right| \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3}; \\ X_3 &= 2\left|\sqrt[3]{r}\right| \cos\frac{\varphi + 4\pi}{3}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Где r = $\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right|$; $\cos\varphi = -\frac{q}{2r}$; $\sin\varphi = \frac{q}{r}$ [4, стр. 196] (9)

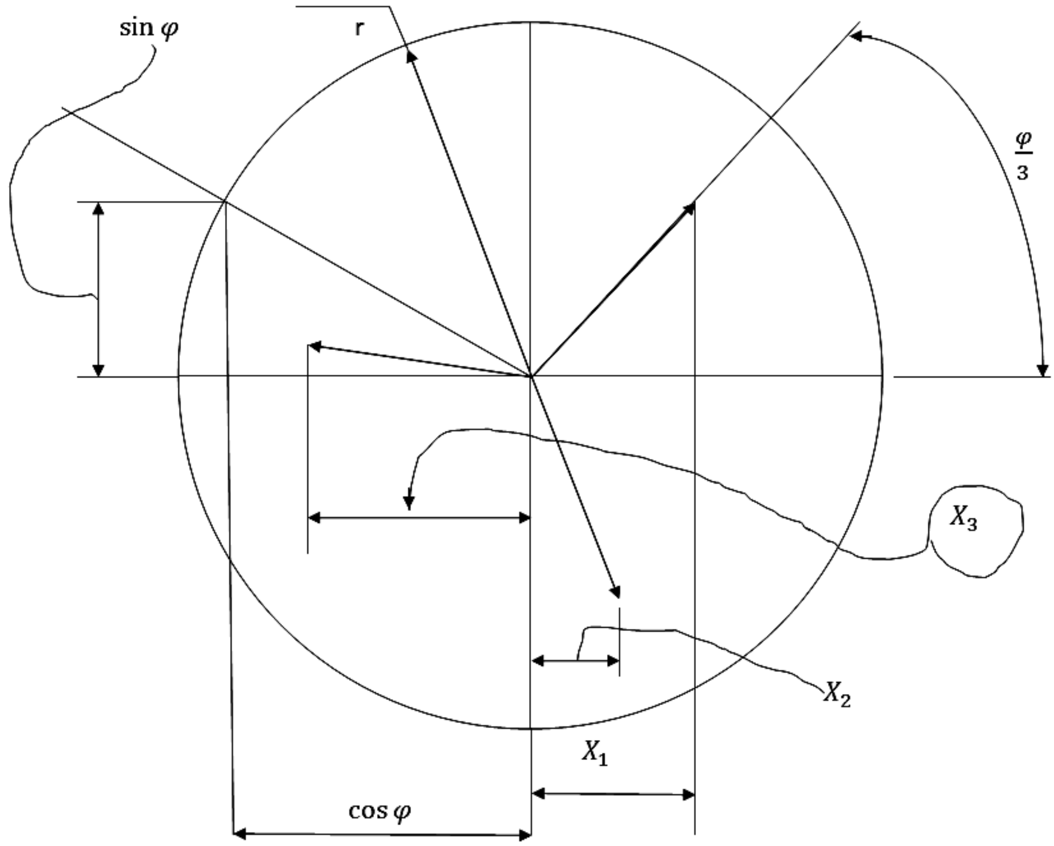

Рис. 2. Схема интерпретации корней кубического уравнения, при отрицательном дискриминанте

Пример. В настоящее время в системах АСУ (Автоматические системы управления) широко применяется передача неограниченного количества сигналов по однопроводной системе связи, которые связаны частотными характеристиками. Реле приема информации срабатывает при определенных значениях напряжения. Рассмотрим колебательный контур (Рис. 3).

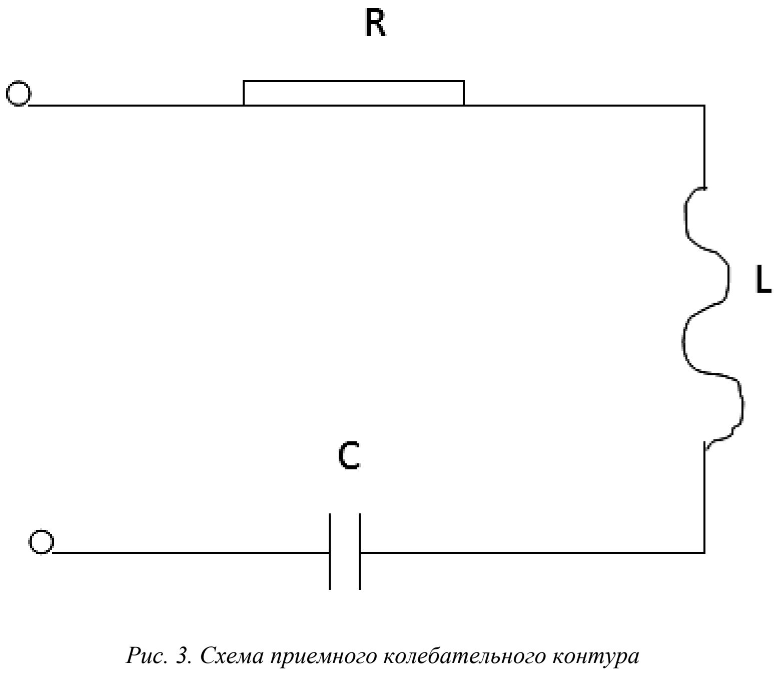

Рис. 3. Схема приемного колебательного контура

Напряжение в колебательном контуре зависит от общего сопротивления в контуре. При поступлении сигналов различной частоты происходит наложение сигналов друг на друга, рассмотрим совместное действие сигналов, выраженное формулой: $[4., стр. 165]$

U = $8(\cos 3\varphi + \cos\varphi)$ при достижении напряжения значения U= 7В срабатывает приемное реле и сигнал проходит к определенной установке.

Введем подстановку X = 2cos φ , тогда $2\cos 3\varphi = X^3 - 3X$, в результате чего получаем кубическое уравнение:

$X^3 - 2X - 1{,}75 = 0$ (10)

По формуле Кардано:

$$X_0 = \sqrt[3]{0{,}875 + \sqrt{0{,}765625 - 0{,}2962963}} + \sqrt[3]{0{,}875 - \sqrt{0{,}4693287}}$$

$$X_0 = \sqrt[3]{1{,}5600757} + \sqrt[3]{0{,}1899243} \approx 1{,}73461$$

Задачу можно было решать и графически, но ввиду того, что мы имеем приближенные значения, мы воспользовались микрокалькулятором.

Проверка.

$$(1{,}73461)^3 - 2 * 1{,}73461 - 1{,}75 = 5{,}2192192 - 3{,}46922 - 1{,}75 \approx$$
$$\approx -0{,}0000008 \ldots$$

$$X^3 - 2X - 1{,}75 \approx (X - 1{,}73461)(X^2 - 0{,}01539X + 1{,}0088723 \ldots)$$

Из $X^2 - 0{,}01539X + 1{,}0088723 = 0$ *имеем*

$$X_2 = 0{,}0077 + i * 1{,}004397 \ldots \; X_3 = 0{,}0077 - i * 1{,}004397$$

Задача решена.

Литература

1. *Куспаев Н.* Свойства лучей, исходящих из одной точки под равными углами // Проблемы науки. № 9 (10), 2016.
2. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М. Наука, 1968 г. С. 870.
3. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. Москва, 1978. С. 476.
4. Куразов Т. А. Гармонические и волновые процессы. Алматы, 2011 г. С. 307.