

Приближенное решение уравнений движения изогнутого трубопровода Ткаченко О. П.

Ткаченко Олег Павлович / Tkachenko Oleg Pavlovich – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
лаборатория математического моделирования в физике и технике,
Вычислительный центр Дальневосточного отделения
Российская академия наук, г. Хабаровск

Аннотация: найдены новые поправки к математической модели динамики изогнутого трубопровода. Поставлены численные эксперименты по гидравлическому удару в трубопроводах. Проведено сравнение с результатами, опубликованными в открытой печати.

Ключевые слова: изогнутый трубопровод, гидравлический удар.

Введение

В статье [1] опубликована построенная нами математическая модель, описывающая распространение нелинейных гидроупругих волн в изогнутом трубопроводе, погруженном в вязкоупругую среду. Уравнения движения трубы, в отличие от большинства существующих моделей, выведены на основе нелинейной теории оболочек. В [2] рассмотрены задачи о гидравлическом ударе и внутренних колебаниях в изогнутых трубах, заполненных жидкостью. Теоретически обоснованы уравнения математической модели, проведены расчеты гидравлического удара в различных системах труб, описание которых опубликовано в литературе.

В представленной работе эти результаты дополнительно обоснованы и расширены. На основе опубликованных данных натурных и численных экспериментов [3] проведены новые расчеты и найдены дополнительные подтверждения адекватности и полноты математической модели [1].

1. Формулировка математической модели

В основу модели положены уравнения движения трубы как технической оболочки с учетом геометрической нелинейности деформаций [4]. Для жидкости выбраны уравнения движения сжимаемой жидкости Эйлера с учетом трения стационарного потока о стенку, аналогично теории шероховатых труб. Труба полагалась изогнутой вдоль плоской кривой по своей образующей. Введенные системы координат (декартова и криволинейная) изображены на рис. 1.

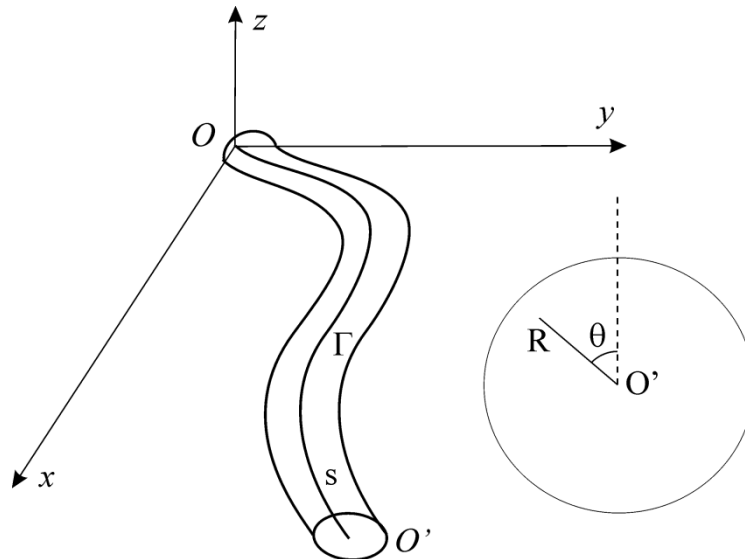


Рис. 1. Геометрия изогнутого трубопровода

Рассматривается металлическая труба длиной L с круглым поперечным сечением радиусом R_0 и малой толщиной стенки h , заполненная потоком сжимаемой жидкости с начальной плотностью ρ_{f0} .

Осевая линия недеформированной трубы является плоской кривой Γ с радиусом кривизны ρ_0 и кривизной K_0 , такими, что мал параметр

$$\lambda = \frac{R_0}{\min |\rho_0|} \ll 1. \quad (1)$$

Введены следующие системы координат: декартова система отсчета $\{Oxyz\}$ и криволинейные координаты $\{Os\theta R\}$ (рис. 1.). Здесь s – длина дуги вдоль Γ от O до точки O' , являющейся пересечением текущего поперечного сечения трубы и Γ ; $\{\theta, R\}$ – полярные координаты в сечении.

Перемещения стенки трубы полагаются малыми. Ее торцы закреплены в основаниях из такого же материала, что и сама труба. Положение стенок, кинематические параметры потока жидкости в начальный момент времени считаются известными. Внешняя среда полагается вязкоупругой, учет ее влияния осуществляется через краевые условия на внешней стенке трубы.

В начальный момент времени система находится в стационарном состоянии. При $t = t_0$ - состояние нарушается посредством возмущения движения жидкости на входе или выходе трубопровода. Трением и силой тяжести в колебательных процессах в жидкости пренебрегаем. Построенная математическая модель описывает движение системы. Физическое обоснование теоретических выкладок и подробности вывода уравнений изложены в [1].

Для безразмерных перемещений стенки трубы

$$u' = u/R_0, \quad v' = v/R_0, \quad w' = w/R_0,$$

скоростей и давления жидкости

$$v_s' = v_s/c_f, \quad v_\theta' = v_\theta/c_f, \quad v_r' = v_r/c_f, \quad p' = p/p_a,$$

c_f - скорость звука в жидкости, p_a - стандартное атмосферное давление, определены приближенные решения уравнений движения оболочки и жидкости в виде:

$$\begin{aligned} u'(s, \theta, t) &= u_0(s, t) + \lambda u_1(s, t) \sin \theta + \lambda u_2(s, t) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ v'(s, \theta, t) &= v_0(s, t) + \lambda v_1(s, t) \sin \theta + \lambda v_2(s, t) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ w'(s, \theta, t) &= w_0(s, t) + \lambda w_1(s, t) \sin \theta + \lambda w_2(s, t) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ v_s' &= v_{s0}(s, R, t) + \lambda v_{s1}(s, R, t) \sin \theta + \lambda v_{s2}(s, R, t) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ v_\theta' &= v_{\theta 0}(s, R, t) + \lambda v_{\theta 1}(s, R, t) \sin \theta + \lambda v_{\theta 2}(s, R, t) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ v_r' &= v_{r0}(s, R, t) + \lambda v_{r1}(s, R, t) \sin \theta + \lambda v_{r2}(s, R, t) \cos \theta + O(\lambda^2); \\ p' &= p_0(s, R, t) + \lambda p_1(s, R, t) \sin \theta + \lambda p_2(s, R, t) \cos \theta + O(\lambda^2). \end{aligned} \quad (2)$$

В результате уравнения движения упростились, и стало возможным их численное решение. Уравнения итоговой математической модели [1, 2]:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} + \alpha v \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} - c^{-2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - h_- \tilde{\beta} v_{0f}^2 / \alpha^2 \right) - h_+ \delta_k \frac{\partial}{\partial \tau} \left(u_0 - 0,5 \cdot h^* \alpha \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right) &= 0; \\ (1 + h_+ KR_0/E^*) w_0 + \alpha v \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + \frac{h^{*2}}{12} \cdot \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \zeta^4} \right) + c^{-2} (1 + \rho_{f0} h_- / 2\rho_t) \times \\ \times \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + \frac{h_- v_{0f} \rho_{f0} c^{-2}}{2\rho_t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} + 0,5\alpha (1 + 0,5h^*) \delta_k \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta} \left(u_0 - 0,5h^* \alpha \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} \right) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P_a}{E^*} \left[h_- (1 + l\beta v_{0f}^2 (L - \zeta) / \rho_{f0} a^2 + p_0) - h_+ p_{ex} / p_a \right]; \\
c^{-2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} + (1 - \nu) u_1 / 2 + \frac{\delta_k}{h^*} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + 0,5 \cdot (1 + \nu) \alpha \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} - \alpha \nu \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = \\
&= (1 - \nu) f u_0 / 2 - 2\alpha^2 f \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} - \delta_k f \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + (1 - \nu) \alpha f \frac{\partial w_0}{\partial \zeta} - \tilde{\beta} f v_{0f}^2; \\
c^{-2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} - \alpha^2 \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \zeta^2} + v_2 + \frac{\delta_k}{h^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(v_2 - \frac{h^*}{2} w_1 \right) - w_1 - \frac{1 + \nu}{2} \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} = \\
&= f w_0 - \frac{3 - \nu}{2} \alpha f \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}; \left(1 + KR_0 / E^* h^* \right) w_1 + \frac{h^{*2}}{12} \alpha^2 \left(\alpha^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^4} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \right) + \\
&+ c^{-2} \left(1 + \frac{\rho_{f0}}{\rho_t h^*} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + \frac{\rho_{f0} v_{0f}}{\rho_t h^* c^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau \partial \zeta} - v_2 - \frac{\delta_k}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(v_2 - h^* w_1 / 2 - \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \right) + \\
&+ \alpha \nu \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} = h^{*2} \alpha^4 \frac{f}{3} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \zeta^4} - 2\nu f w_0 - (1 - \nu) f \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + Z_0^1 / E^*; \\
Z_0^1 &= \frac{P_{am} v_{0f} f}{ah^*} (v_{0f} + 2v_{s0}) + \frac{\rho_{f0} \omega^2 R_0^2}{h^*} v_{0f} \left(3f \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} - 0,25 \cdot \tilde{F}_1(\tau, \zeta) \right) - \\
&- 0,5 \cdot p_a f \left[1 + \frac{l\beta v_{0f}^2}{\rho_{f0} a} (L - \zeta) - \frac{\alpha^2}{2a} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + v_{0f} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} \right) + p_{ex} / p_a + KR_0 w_0 / p_a \right]; \\
\frac{\partial v_{s0}}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} &= -a \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + F(\tau, \zeta); a \left(\frac{\partial p_0}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial w_0}{\partial \tau} = 0; v_{r0} = \alpha r \frac{\partial w_0}{\partial \tau}; \\
p_1 &= 2rv_{0f} f v_{s0} / a + \frac{\alpha^2 r}{a} \left[3fv_{0f} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} - \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + v_{0f} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau \partial \zeta} \right) + (r^2 - 3)v_{0f} \tilde{F}_1 / 8 \right]; \\
\tilde{F}_1(\tau, \zeta) &= 2f \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 v_{s0} + \frac{af}{v_{0f}} \frac{\partial^2 p_0}{\partial \zeta^2} + 7f \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau \partial \zeta} - \frac{l\beta f}{\rho_{f0}} \frac{\partial w_0}{\partial \tau} - \\
&- f \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + v_{0f} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(2a \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + \frac{1}{v_{0f}} \left(\frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_0}{\partial \tau} \right) \right); \tilde{F}_2 = 0. \quad 1 \leftrightarrow 2. \quad (3)
\end{aligned}$$

Здесь сделан переход к безразмерным координатам $\zeta = s/l$, $r = R/R_0$ и времени $\tau = \omega t$. В (3) обозначено:

$$\begin{aligned}
c^{-2} &= \rho_t R_0^2 \omega^2 / E^*; E^* = E / (1 - \nu^2); \tilde{\beta} = \alpha \beta l / 2 \rho_t; \\
\delta_k &= k \omega R_0 \rho_{gr} g h_0 / E^*; h^* = h / R_0; \alpha = R_0 / l; a = p_a / \rho_{f0} c_f^2; f = \min \rho_0 / \rho_0; l, \omega -
\end{aligned}$$

характерные размеры по координате s и времени t , соответственно; ρ_t - плотность материала трубы, k - коэффициент вязкого трения внешней среды, β - коэффициент трения внутреннего потока, p_{ex} -

постоянное давление внешней среды, v_{0f} - скорость потока на входе трубы. Уравнения (3) являются одномерными по пространству, что является значительным упрощением по сравнению с двумерными уравнениями теории оболочек.

Таким образом, в [1, 2, 4] создан метод редукции двумерных по пространству уравнений динамики оболочки под влиянием внутреннего потока к одномерной задаче совместного движения оболочки и жидкости.

2. Задача о гидравлическом ударе в системе труб

В статье [3] рассматривается задача о гидроупругих колебаниях в системе труб, изображенной на рис. 2.

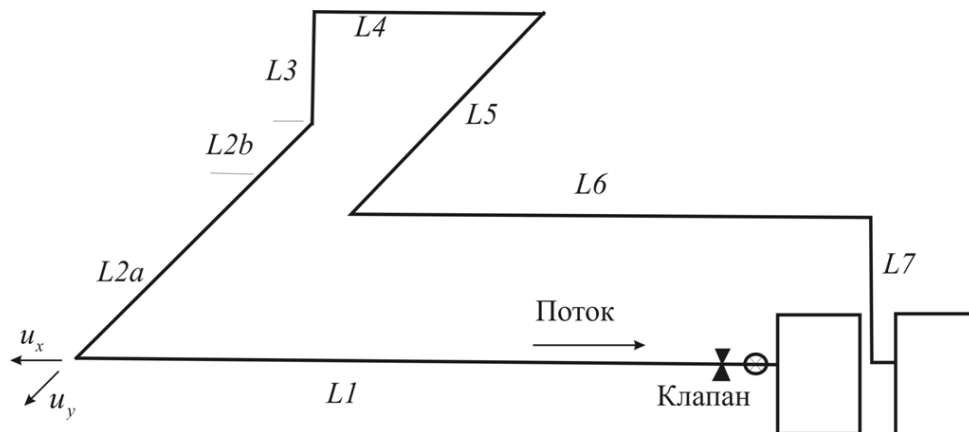


Рис. 2. Схема эксперимента. Поток отсекается клапаном от насоса

Все трубы соединены под прямым углом стандартными переходниками. Параметры трубопровода и потока: $L_1 = 12,27$ м, $L_2 = 7,65$ м, $L_3 = 3,08$ м, $R_0 = 13$ мм, $h = 1,27$ мм, $\rho_0 = 20,6$ мм, $\rho_t = 8940$ кг/м³, $E = 117$ ГПа, $\nu = 0,34$, $\rho_{f0} = 998$ кг/м³. Время закрытия клапана $t_k \approx 4$ мс. Поток отсекается от насоса клапаном, и колебания давления снимаются непосредственно перед клапаном на участке 1. При таких параметрах $h/R_0 \approx 0,098$; $\lambda \approx 0,631$.

Прямым вычислением доказывается, что для корректного учета поворота трубы на 90° необходимо дополнить правую часть уравнений движения жидкости слагаемым $\sim \lambda^2 \frac{\partial w_1}{\partial t}$, где w_1 - радиальное перемещение стенки трубы в первом приближении по малому параметру λ . Эта поправка приводит к новым, более точным, чем в [1], результатам расчета давления (рис. 3). Представлены данные для свободных колен трубы (1-2), (2-3), прочие колена закреплены жестко.

Заключение

Поставлены новые численные эксперименты для полной системы труб из [3] с уточненными слагаемыми в уравнениях движения. Эти данные дополнительно подтверждают адекватность математической модели [1, 2, 4].

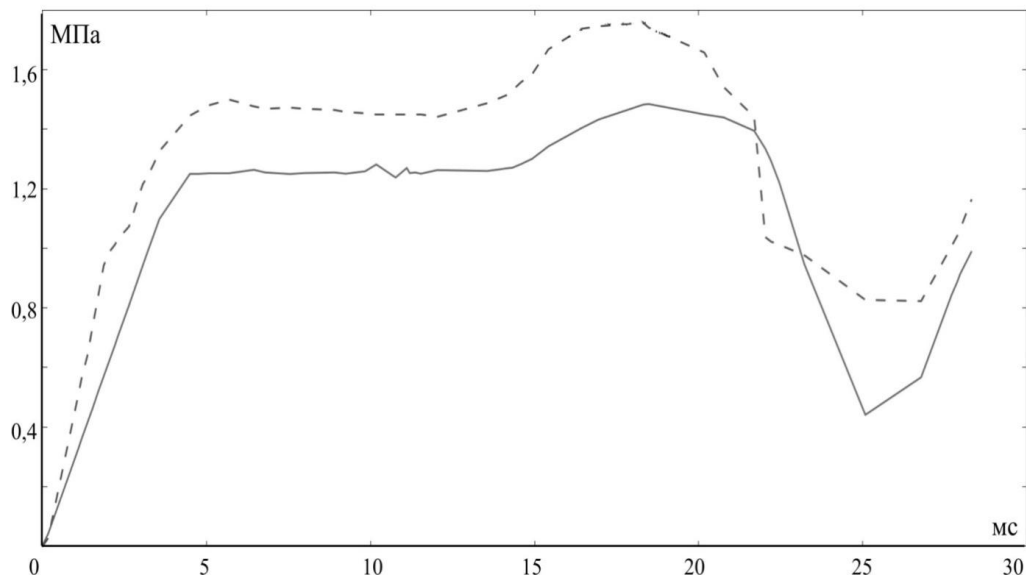


Рис. 3. Результаты эксперимента. Пунктир – данные измерений [3], линия – расчет

Литература

1. Рукавишников В. А., Ткаченко О. П. Численное и асимптотическое решение уравнений распространения гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // Прикладная механика и техническая физика, 2000. Т. 41. № 6. С. 161-169.
2. Рукавишников В. А., Ткаченко О. П. Численный анализ математической модели гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // Математическое Моделирование, 2011. Т. 23, № 1. С. 51-64.
3. Wiggert D. C., Otwell R. S., Hatfield F. J. The Effect of Elbow Restraint of Pressure Transients // Journal of Fluids Engineering, 1985. V. 107. P. 402-406.
4. Рукавишников В. А., Ткаченко О. П. Приближенное решение нелинейной задачи о деформировании подземного трубопровода // Сибирский журнал индустриальной математики, 2010. Т. 13, № 4 (44). С. 97-108.