

Свойства лучей, исходящих из данной точки под равными углами Куспаев Н. Д.

Куспаев Нургалий Джумагалиевич / Kuspaev Nurgaliy Djumagalievich - инженер-строитель,
Республиканское государственное предприятие
Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова, г. Актобе, Республика Казахстан

Аннотация: в данной статье продолжено изучение свойств трисектрис углов треугольников и приводятся новые теоремы, раскрывающие ранее неизвестные свойства лучей, исходящих из заданной точки под постоянным углом β . Свойства этих лучей выполняют важную роль при выполнении эскизных работ по проективной геометрии, а также в исследованиях по изучению теории распространения световых волн в оптической физике и могут на практике применяться в ходе геодезического сопровождения строительства кривых участков автомобильных и железных дорог.

Ключевые слова: внутренние углы треугольников, биссектрисы и трисектрисы внутренних углов, лучи и прямые, круговая кривая, угол поворота, тангенсы и домеры.

Четвертая теорема о трисектрисах угла треугольника

В предыдущей статье [1] рассмотрено несколько свойств трисектрис угла треугольника. В этой статье мы раскрываем ранее неизвестные свойства трисектрис.

Теорема

Трисектрисы угла C треугольника ΔABC отсекают на противоположной стороне треугольника отрезки, пропорционально произведению длин векторов, образующих соответствующие отрезки.

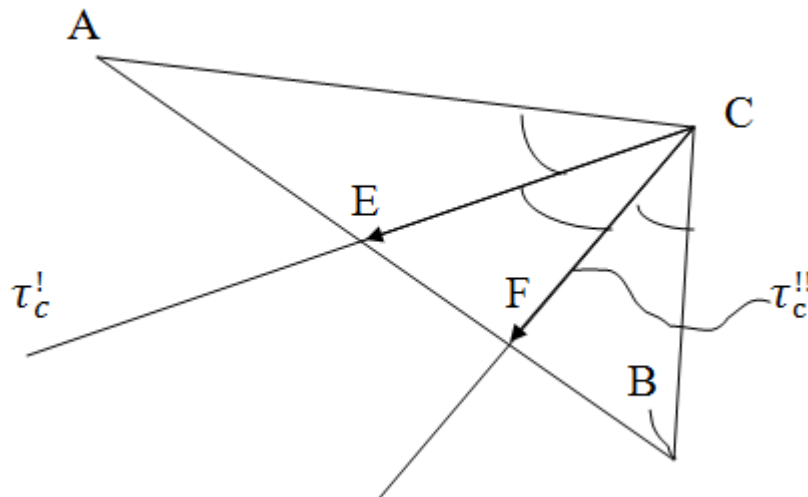


Рис. 1. Свойство трисектрисы угла

Для доказательства на рис. 1 построим треугольник ΔABC с трисектрисами τ_C^I и τ_C^{II} . Из формул аналитического определения трисектрис внутреннего угла треугольника [2] имеем равенства:

$$AE = \frac{b\tau_C^{II}}{b\tau_C^{II} + a\tau_C^I + \tau_C^I\tau_C^{II}}; \quad (1)$$

$$EF = \frac{c\tau_C^I\tau_C^{II}}{b\tau_C^{II} + a\tau_C^I + \tau_C^I\tau_C^{II}} \quad (2)$$

$$BF = \frac{a\tau_C^I}{b\tau_C^{II} + a\tau_C^I + \tau_C^I\tau_C^{II}}. \quad (3)$$

Определение

Общий множитель для всех частей основания треугольника ΔABC , выраженный формулой

$$\gamma = \frac{c}{b\tau_C^{II} + a\tau_C^I + \tau_C^I\tau_C^{II}} \quad (4)$$

Назовем характеристическим числом трисектрис угла C , характерным только для данного угла треугольника ΔABC .

Для отношения $AE/EF/BF$ из формул (2) все значения сократим

на величину характеристического числа и получаем равенство в виде формулы (5)

$$AE / EF / BF = (b*CE)/(CE*CF)/(CF*a). \quad (5)$$

Внутри каждой из трех скобок стоят произведения длин векторов, исходящих из вершины С и образующих составные части АЕ, ЕF и ВF соответственно. Теорема доказана.

Теорема

Лучи, исходящие от фиксированной точки С под одним и тем же углом β отсекают на прямой, проходящей от заданной точки на определенном расстоянии отрезки пропорционально произведениям длин векторов, образующих эти отрезки. Данная теорема доказывается методом математической дедукции. См. рис. 3.

Рассмотрим N лучи, исходящие из заданной точки С и имеющие углы, имеющие одинаковые значения β между соседними лучами. При N=2, из теоремы о биссектрисе [1] согласно рис. 2 имеем равенство:

$$AD / BD = AC/BC, \quad (6)$$

составляющие отношения стоящего в правой части равенства умножаем на длину биссектрисы угла С (CD) и получим тождество: $AD/BD = (b \cdot \beta_c) / (\beta_c \cdot a)$.

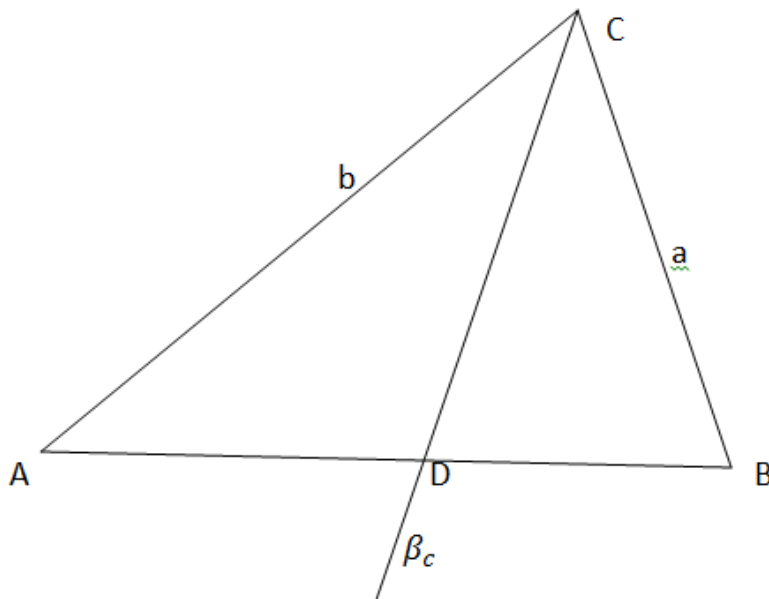


Рис. 2. Свойство биссектрисы угла С треугольника Δ ABC

Справедливость теоремы для N=3 вытекает из четвертого свойства трисектрис угла С (формула (5)).

Теперь допустим, что данная теорема справедлива для достаточно большого значения $N = n\beta$ и докажем справедливость теоремы для случая $N_1 = (n + 1)\beta$. См. Рис. 3.

В треугольнике Δ ABC угол $\angle ACB = n\beta$, и допустим, что для всех частей стороны АВ, полученных пересечением всех лучей, делящих угол С на равные части с одинаковыми значениями β теорема справедлива. В треугольнике Δ ABC, оставив последние два составляющих угла $\angle KCL = \angle LCB = \beta$ дополним треугольник еще одним лучом под углом $\angle BCN = \beta$. Для полученного треугольника Δ ACN угол $\angle ACN = (n + 1)\beta$.

В треугольнике Δ KCN лучи CL и CB являются трисектрисами вершины С и для частей KL, LB и BN его основания KN теорема выполнима, согласно свойствам трисектрис по первоначально приведенной теореме. Теорема доказана.

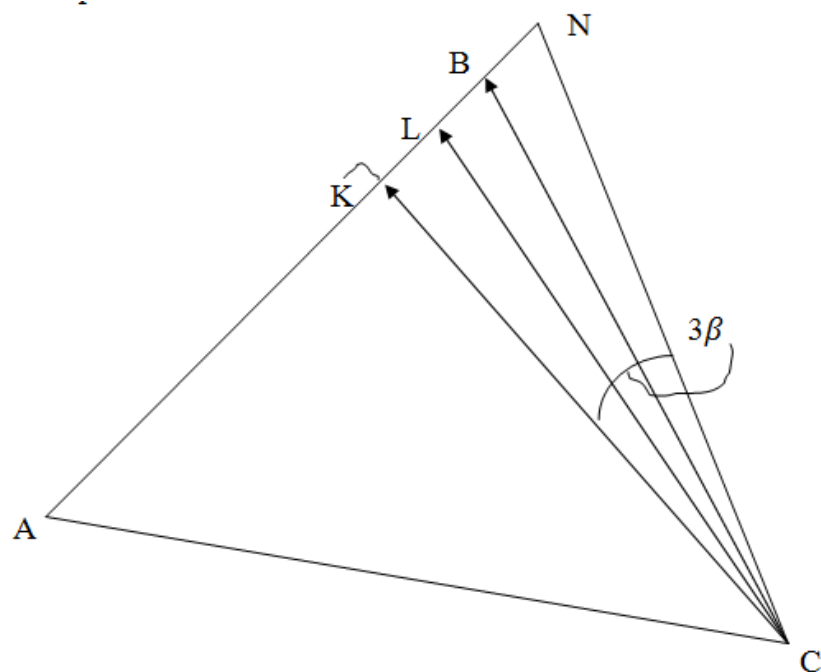


Рис. 3. Свойства множества лучей, исходящих из одной точки

Геодезическая разбивка круговых кривых при строительстве автомобильных и железных дорог

Приведем определения основных терминов, применяемых в дорожном строительстве.

Определение 1. Расстояние от вершины угла до начала или конца круговой кривой называется тангенсом угла поворота.

Определение 2. Разница между расстоянием от центра угла поворота до точки, принадлежащей тангенсу угла поворота и радиусом круговой кривой называется Домером (см. рис. 4).

Определение 3. Отрезок тангенса угла, образованный двумя соседними лучами называется «дольками» тангенса.

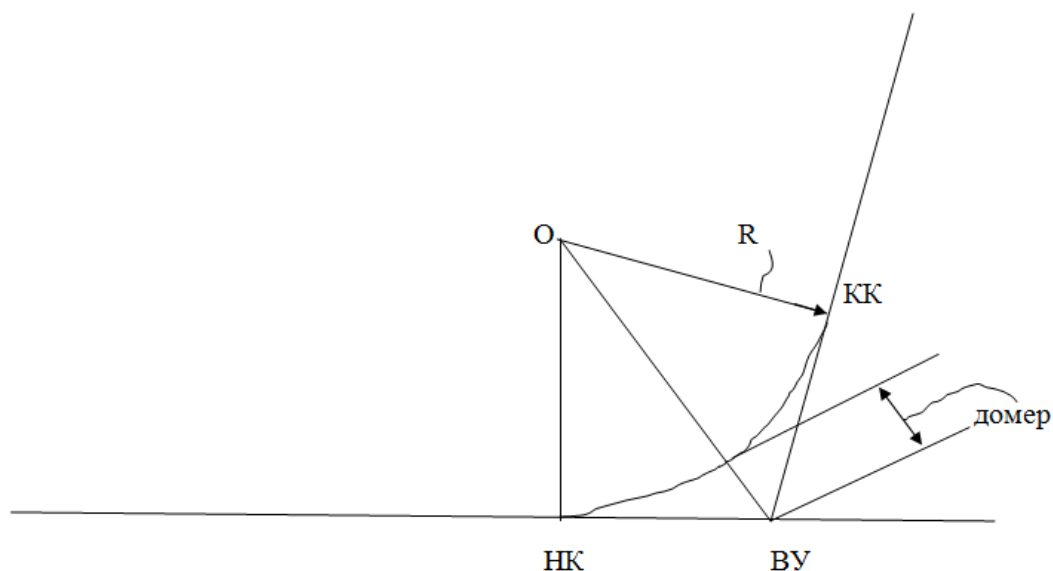


Рис. 4. Схемы элементов круговой кривой

О – центр угла поворота.

R – радиус кривой.

ВУ - вершина угла поворота

НК, КК – начало и конец круговой кривой.

При подетальной разбивке предлагаемым методом, рассматриваем треугольник с вершинами в точках О, НК и ВУ, (в дальнейшем прямоугольный треугольник $\Delta OВК$), где В – вершина угла поворота и К – начало кривой (Рис. 5), а конец кривой КК симметричен с НК по линии ОВ.

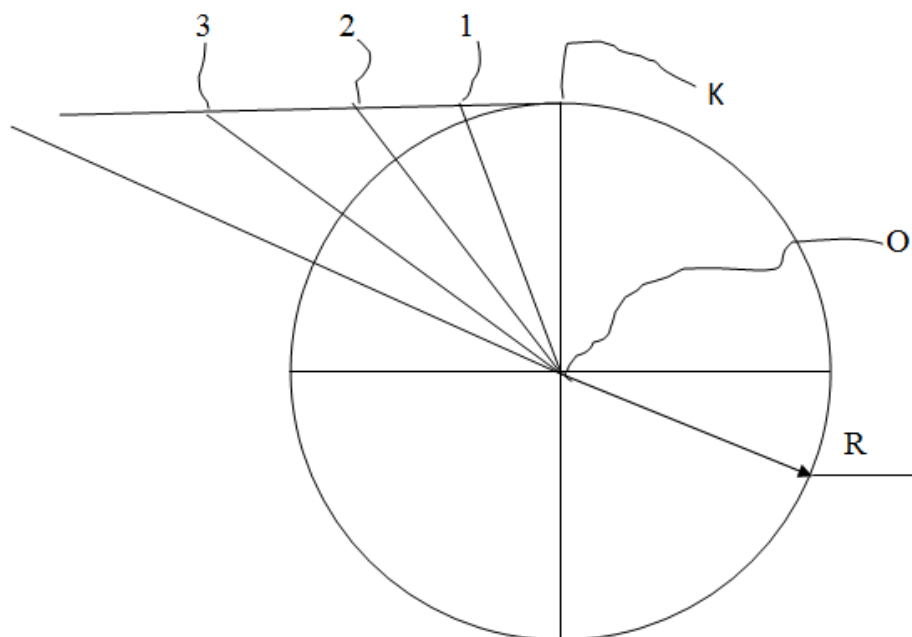


Рис. 5. Схема разбивки кривой

Угол $\angle BOK$ делим на десять равных частей (можно разделить на любое равное количество частей). Для удобства промежуточные точки на «тангенсе» пронумеруем цифрами 1,2,3 ... и т. д., начиная с точки начала кривой (точка К).

Для первого деления $\triangle OK1$ со сторонами $OK = R$,

$$O1 = R / \cos \alpha, \text{ где } \alpha = \frac{\angle BOK}{10} \text{ и } 1K = R \sin \alpha / \cos \alpha = R \tan \alpha. \quad (7)$$

Для второго деления $\triangle O21$, одна сторона которого $O1$ известна, вторая сторона $O2 = R / \cos 2\alpha$, а третья сторона определяется с использованием предыдущей теоремы по формуле (8).

$|21| = \frac{1K \cdot (O2 \cdot O1)}{(O1 \cdot OK)} = \frac{1K \cdot O2}{OK}$, (8) Подетальная разбивка удобна тем, что при разбивке используются короткие расстояния, удобные в применениях и менее трудоемкие, чем привязка к отдаленной точке О (центру угла поворота).

Для третьего деления $\triangle O32$, одна сторона которого $O2$, подсчитана в предыдущем шаге алгоритма, вторая сторона $O3 = R / \cos 3\alpha$, третья сторона, как последующая доля тангенса угла поворота находится по формуле (9).

$$|32| = \frac{1K \cdot (O3 \cdot O2)}{(O1 \cdot OK)} \text{ и т. д.;} \quad (9)$$

Для i -го деления, одна сторона которого определяется в предыдущем шаге, это отрезок от центра угла до предыдущей точки, другая сторона

$O(i-1) = R / \cos(i\alpha)$ и отрезок на «тангенсе»:

$$|i(i-1)| = \frac{1K \cdot (Oi \cdot O(i-1))}{(O1 \cdot OK)} \quad (10)$$

и для последнего деления, в нашем случае (десятого) треугольник $\triangle BO9$ сторона $O9$ определяется в предыдущем шаге, вторая сторона $OB = R / \cos(10\alpha)$ и последний отрезок

$$B9 = \frac{1K \cdot (OB \cdot O9)}{(O1 \cdot OK)} \quad (11)$$

Литература

1. Куснаев Н. Дж. Теоремы о биссектрисе и трисектрисах треугольника // Проблемы науки. Август 2016.
2. Куснаев Н. Дж. Аналитическое определение длин трисектрис // Проблемы науки. Август 2016.
3. Справочник по элементарной математике. М., 1972. С. 284.
4. Академия коммуникации и транспорта. г. Алматы, 2014.