РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ

Рахимов Н. Н.[1], Тагирова З. Г.[2], Джумаев М. М.[3]

[1]Рахимов Насриддин Номозович / Rahimov Nasriddin Nomozovich – преподаватель;
[2]Тагирова Зухра Гулямовна / Tagirova Zuxra Gulyatovna – преподаватель;
[3]Джумаев Максуд Мияссарович / Djumayev Maqsud Miyassarovich – преподаватель,
Академический лицей № 2
Самаркандский государственный университет, г. Самарканд, Республика Узбекистан

Аннотация: *в статье указаны с помощью теоремы косинуса методы решения некоторых алгебраические задачи. В каждом этюде приведены геометрические приемы решения задач. Они, как правило, не обладают для учащихся признаком привычности, но, как показывает опыт, легко ими воспринимаются. Благодаря интеграции «негеометрического» условия задачи и ее геометрического решения математические знания предстают перед учащимися как живая, динамичная система, способная решать задачи из других наук и практики. По существу, действует двусторонний процесс: обучение математике и обучение математикой.*
Некоторые задачи, дорогие коллеги, могут показаться вам сложными для выбора их в качестве упражнений на уроке, тогда можно рассмотреть их на факультативных занятиях.

***Ключевые слова**: теорема, треугольник, функция, уравнение, неравенство, система уравнений.*

Известно, из теоремы косинусов верна следующая формула $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, где *a*, *b* и *c* – стороны треугольнике. Об этой теореме все ученики хорошо знают по школьному курсу геометрии.

Мы на этой статье покажем: с помощью теоремы косинусов можно не только решить геометрические задачи, но и можно решить алгебраические задачи.

Решить задачи в этом методе учеников ещё более интересовало на уроке математики.

1-задача. Найдите наибольшие значения функции $f(x) = \sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$

Решение. Посмотрим треугольник ABC (1 рис.),

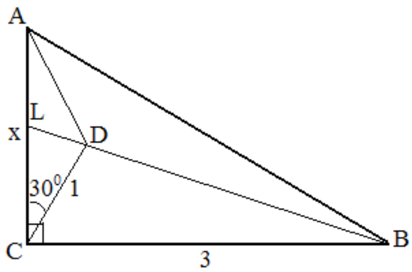

Рис. 1. Над рисунками найдем отрезок DB

здесь $\angle ACB = 90^0, \angle ACD = 30^0, AC = x, BC = 3, CD = 1$ и точка D расположена внутри треугольника ABC. В треугольнике ABC применяем теорему Пифагора: $AB = \sqrt{x^2+9}$.

В треугольнике ACD применяем теорему косинусов: $AD = \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$.

Тогда, $\max f(x) = \max(AB - AD) = EB - ED = DB$, этот способ выполнить только будет(из неравенство треугольнике) $D \in AB$.

Из теоремы косинусов: $DB = \sqrt{1^2 + 3^2 - 2\cdot 1\cdot 3\cdot \cos 60^0} = \sqrt{7}$.

Значит ответ: $f_{\max}(x) = \sqrt{7}$. [1]

2-задача. Решить уравнение. $\sqrt{x^2 - 5x\sqrt{2} + 25} + \sqrt{x^2 - 12x\sqrt{2} + 144} = 13$

Решение. Рисуем ABC-прямоугольный треугольник и проводим CD-биссектрису (2 рис.).

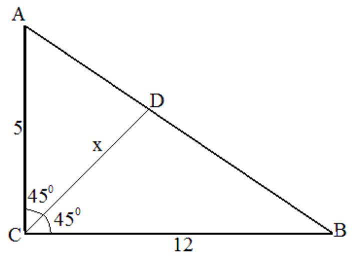

Рис. 2. Изображение CD-биссектрисы

Прямоугольные треугольники ADC и BDC, применять теорему косинусов, возьмём результат $AD=\sqrt{x^2-5x\sqrt{2}+25}$ и $\mathrm{BD}=\sqrt{\mathrm{x}^2-12x\sqrt{2}+144}$.
Известно, AB=AD+BD=13 и CD=x-биссектриса.

Тогда, $CD=x=\dfrac{\sqrt{2}\cdot AC\cdot BC}{AC+BC}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot 5\cdot 12}{5+12}=\dfrac{60\sqrt{2}}{17}$. Значит, ответ: $x=\dfrac{60\sqrt{2}}{17}$. [1]

3-задача. Вычислить (без калькулятора и таблиц) sin18.

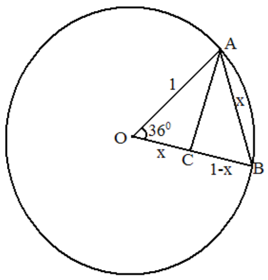

Рис. 3. Над рисунками найдем отрезок x

Рассмотрим сектор OAB окружности с центром в точке O и радиуса 1(центральный угол равен 36^0). Проведём хорду AB, на отрезке OB построим точку C так, чтобы AC = AB, при этом $\angle$ ACB=$\angle$ ABC=72°,
а $\angle$ CAB=36° (3-рисунок). Таким образом, OC=AC. Пусть AB=x, а CB=1-x.
Так как AC – биссектриса треугольника OAB, справедлива пропорция
$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$ (биссектриса делит противоположную сторону на отрезки пропорциональные к прилежащим сторонам), откуда $x^2+x-1=0$, $(x>0)$,

$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. По теореме косинусов: $AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$

$x^2=1+1-2\cdot\cos 36^0$, $x=\sqrt{2(1-\cos 36^0)}=2\sin 18^0$. Тогда $\sin 18^0=\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. [2, 4]

4-задача. Для положительных *x, y, z, a, b, c* чисел верно следующее систем уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2 \\ y^2+yz+z^2=b^2 \\ z^2+zx+x^2=c^2 \end{cases}$$

. Найти значение суммы *xy*+*yz*+*zx*.

Решение. Построить график соответственно условиям задачи (4 рисунок).

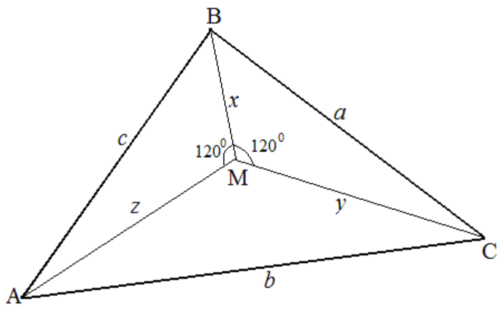

Рис. 4. Над рисунками найдем площадь треугольников AMB, BMC, AMC

Из теоремы косинусов будет $x^2+xy+y^2=a^2$, $y^2+yz+z^2=b^2$, $z^2+zx+x^2=c^2$.

Теперь площади треугольников BMC, AMC, AMB соответственно так S_1, S_2, S_3, тогда будет $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}xy$; $S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}yz$; $S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}zx$

В этом случай $S_1+S_2+S_3=S_{ABC}$, то $\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)=S_{ABC}$

Тепер найдем площадь треугольника ABC с помощью формулы Герона.

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}}.$$

Значит значение суммы $xy+yz+zx$ равно

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

$$xy+yz+zx=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{3}}.\quad [2,\ 3]$$

5-**задача.** Решить уравнение $\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{10-6\cos x}=\sqrt{10-6\cos 2x}$, где $x\in(0;\frac{\pi}{2})$.

Решение. Решим этого уравнение с теорему косинусов. Построим следующий рисунок (5 рисунок).

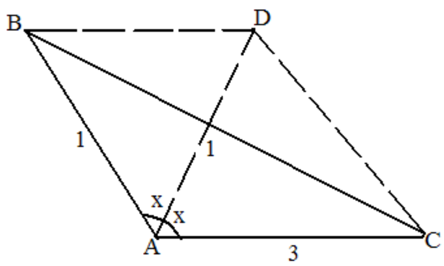

Рис. 5. Из условий задачи построим приблизительный рисунок

Аналогично, из рисунка $BD=\sqrt{2-2\cos x}$; $DC=\sqrt{10-6\cos x}$; $BC=\sqrt{10-6\cos 2x}$.

Из условий задачи *BD*+*DC*=*BC*. Значит точка *D*, принадлежащая отрезку *BC*. Поэтому отрезок *AD* будет биссектриса треугольника *ABC*.

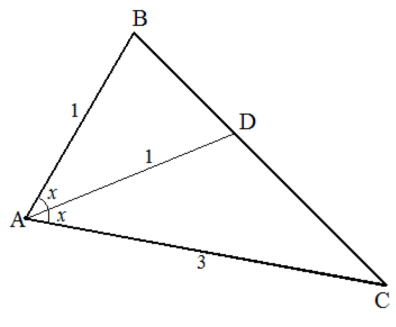

Рис. 6. Из свойств биссектрисы найдем угол x

Из свойств биссектрисы (6 рисунок)

$AD = \frac{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos x}{AB + AC}$, $\cos x = \frac{AD \cdot (AB + AC)}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{1 \cdot (1+3)}{2 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$. Ответ: $x = \arccos\frac{2}{3}$. $[2,\ 4]$

Задачи для самостоятельных работ.

№ 1. Найдите наименьшие значения функции $f(x) = \sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$.

№ 2. Решить уравнение $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 3x\sqrt{3} + 9} = \sqrt{19}$

Литература

1. *Генкин Г. З.* Геометрические решения негеометрических задач: кн. для учителя. М.: Просвещение, 2007. 79 с.
2. *Исраилов И., Пашаев З.* Геометрия 1-часть. Учебник академического лицея. Ташкент. Издательство «Учитель», 2004 г.
3. *Абдухамидов А. У., Насимов Х. А. и др.* Алгебра и основы математического анализа. Учебник академического лицея. Ташкент. Издательство «Учитель», 2012 г.
4. *Яковлев Г. Н., Купцов Л. П. и др.* Всероссийские математические олимпиады школьников. Москва. Издательство «Просвещение», 1992 г.