

# ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ «N» ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

Куразов Т. А.<sup>1</sup>, Куспаева В. Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Куразов Туретай Аманжолович - профессор,  
кафедра физики конденсированного состояния, физико-математический факультет,  
Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова;

<sup>2</sup>Куспаева Венера Нурғалиевна - заведующая отделением,  
Актюбинский колледж нефти и газа, г. Актобе, Республика Казахстан

**Аннотация:** согласно выписке из «Википедии», к открытым проблемам по математике относится задача о размещении множества точек на поверхности сферы радиуса  $R$ , которую предлагаем решить методом построения описанных около заданной сферы кругов с определенными радиусами [1].

Постановка задачи согласно первоисточнику:

Как разместить « $n$ » точек на сфере, чтобы наименьшее из попарных расстояний между ними было максимальным? Постановка задачи с физической точки зрения. Как разместить « $n$ » навигационных радиомаяков в стратосфере нашей планеты, чтобы наименьшее из попарных расстояний между ними было максимальным?

Данную задачу решим при помощи обратной задачи.

**Ключевые слова:** центр и радиус окружностей, центральный угол, синус, тангенс, описанная окружность, навигационные радиомаяки.

Формулировку задачи можно изменить следующим образом. Найти количество непересекающихся кругов заданного радиуса, касающихся поверхности сферы заданного радиуса  $R$ .

Круги радиуса  $r$  касаются поверхности сферы центральными точками. Задача решается аналогично задаче по размещению окружностей единичного радиуса на поверхности сферы радиуса  $R$ , только отличием является то, что центральный угол стороны описанного многоугольника определяется при помощи тангенса этого угла [2., стр.193]. См. рис. № 1.

$$\beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{r}{R}, \quad (1), \text{ где } r \text{ и } R \text{ радиусы описанного круга и самой сферы соответственно.}$$

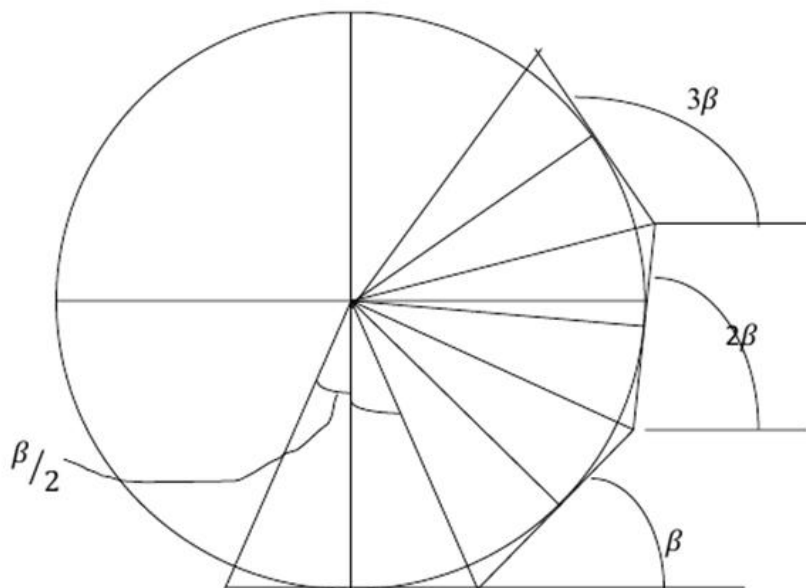


Рис. 1. Схема расположения центров описанных окружностей

Искомое расстояние между точками касания определяется как длина хорды окружности поперечного сечения:

$$d = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

где  $\alpha$  центральный угол сектора по сечению плоскостью параллельной экваториальной плоскости, который при постоянной величине стороны вписанного многоугольника меняется в зависимости от расстояния секущей площади от экваториальной плоскости (Рис. 2 и 3).

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= r + r \cos \beta ; \\ R_2 &= r + 2r \cos \beta + r \cos 2\beta ; \\ R_3 &= r + 2r \cos \beta + 2r \cos 2\beta + r \cos 3\beta ; \\ R_4 &= r + 2r \cos \beta + \dots + 2r \cos 3\beta + r \cos 4\beta ; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$R_i = r + 2r \cos \beta + \dots + 2r \cos(i - 1)\beta + r \cos(i\beta) \dots$$

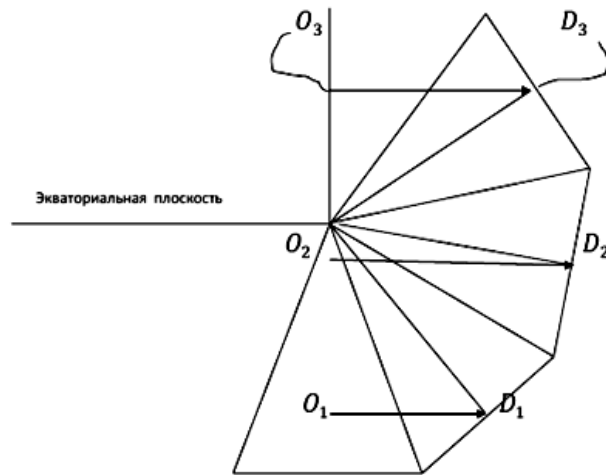


Рис. 2. Схема расположения касающихся поверхности сферы кругов по вертикальному диаметральному сечению

Первая точка находится на нижнем полюсе заданной сферы.

$\left\lceil \frac{2\pi}{\beta} \right\rceil$  это отношение определяет количество сторон описанных кругов по центральному сечению заданной сферы, половина этого значения количество рядов в вертикальном сечении сферы (значения  $i$ ).

Так же, как и при решении предыдущей задачи определяется по каждому горизонтальному ряду количество описанных вокруг сферы кругов, общая сумма всех описанных кругов по всем рядам и определит общее количество точек, лежащих на поверхности сферы для которых наименьшее из попарных расстояний между ними было бы максимальным. Углы  $\beta$  и  $\alpha_i$ , следовательно как количество всех точек (центров кругов) так и расстояние между ними напрямую зависят от отношения радиусов непересекающихся кругов с одинаковыми радиусами ( $r$ ) и радиуса сферы.

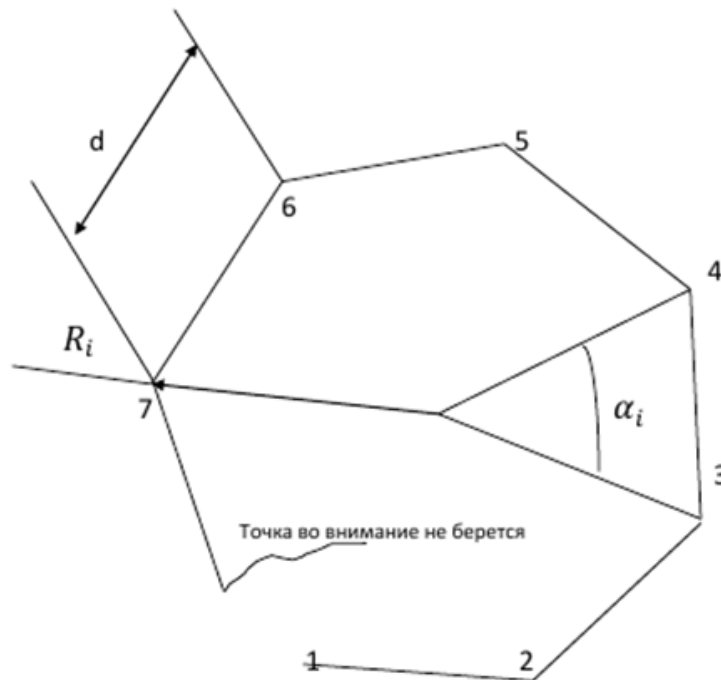


Рис. 3. Схема касания кругами поверхности сферы по их горизонтальным сечениям

Приведем пример расчета определения количества описанных сфер непересекающихся кругов с одинаковыми радиусами в табличном виде.

Таблица 1. Расчета количества кругов, касающихся сферу окружностей при соотношениях их радиусов

Отношения радиусов	$1/7$	$1/13$	$1/17$	$1/23$	
Центральный угол диаметров □	0,28379411	0,15354378	0,11751164	0,08690179	
Число вершин вписанных многоугольник по плоскости центр. сечения	22	40	53	72	
$2\pi/\beta$	22,1399	40,9211	53,4686	72,3021	
Число рядов	11	20	26	36	
Количество точек (центров) кругов	150	536	897	1652	
Расчетные расстояния между точками	0,282843R	0,153393R	0,117444R	0,086874R	

Для каждого из соотношении радиусов вычислим количество центров описанных кругов, на поверхности сферы (Число точек).

Таблица 2. Расчеты при соотношениях радиусов ( $r/R = 1/7, \beta = 0,28379411$ )

№№ рядов	$R_k$	$\alpha_k$	$\approx n_k$	$]n_k[$	примечания
1	1,96 r	1,058942	5,933	5	
2	3,7632 r	0,532387	11,80	11	
3	5,2653 r	0,378279	16,610	16	
4	6,3470 r	0,313219	20,060	20	
5	6,9195 r	0,287119	21,884	21	
6	6,9391 r	0,286303	21,946	21	
7	6,4037 r	0,310425	20,241	20	
8	5,3209 r	0,374279	16,787	16	
9	3,8447 r	0,520827	12,064	12	
10	2,0581 r	1,0035945	6,261	6	
11	0,104 r	-----	-----	1	

Всего с учетом точки нижнего полюса 150 точек.

Таблица 3. Расчеты при соотношениях радиусов ( $r/R = 1/13, \beta = 0,15354378 \dots$ )

№№ рядов	$R_k/r$	$\alpha_k/2$	$\approx n_k$	$]n_k[$	примечания
1	1,988235	0,501477	6,265	6	
2	3,929689	0,253724	12,382	12	
3	5,778679	0,172540	18,208	18	
4	7,491700	0,133088	23,605	23	
5	9,028446	0,110435	28,447	28	
6	10,35276	0,096308	32,620	32	

7	11,43348	0,087205	36,025	36	
8	12,24577	0,081420	38,585	38	
9	12,76874	0,078086	40,232	40	
10	12,99187	0,076745	40,935	40	
11	12,90932	0,077724	40,420	40	
12	12,52311	0,079617	39,459	39	
13	11,84214	0,084196	37,313	37	
14	10,88254	0,091620	34,290	34	
15	9,666878	0,103141	30,459	30	
16	8,223764	0,121241	25,912	25	
17	6,587152	0,151364	20,755	20	
18	5,725028	0,174157	18,039	18	
19	3,820590	0,260969	12,038	12	
20	1,848133	0,539493	5,823	5	
21			1	1	

С учетом точки в нижнем полюсе 536 точек, расстояния между центрами описанных кругов  $0,153393 R \approx 1,996069 \square$ .

Таблица 4. Расчеты при соотношениях радиусов ( $r/R = 1/17; \beta = 0,11751164 \dots$ )

№№ рядов	$R_k/r$	$\alpha_k$	$\approx n_k$	$]n_k[$	примечания
1	1,993103	1,04919	5,988	5	
2	3,958716	0,524328	11,983	11	
3	5,869725	0,341181	18,416	18	
4	7,699773	0,260032	24,163	24	
5	9,423617	0,212264	29,601	29	
6	11,017480	0,181465	34,625	34	
7	12,459378	0,160417	39,168	39	
8	13,729422	0,145550	43,169	43	
9	14,810095	0,134912	46,572	46	
10	15,686491	0,127364	49,333	49	
11	16,346521	0,122215	51,411	51	
12	16,781082	0,119046	52,779	52	
13	16,984181	0,117622	53,418	53	
14	16,953014	0,117838	53,321	53	
15	16,688013	0,119711	52,486	52	
16	16,192832	0,123376	50,927	50	
17	15,474302	0,129113	48,664	48	
18	14,542334	0,137400	45,729	45	
19	13,409780	0,149026	42,162	42	

20	12,092265	0,165298	38,011	38	
21	10,607961	0,188491	33,334	33	
22	8,977339	0,222859	28,194	28	
23	7,222892	0,277307	22,658	22	
24	5,368819	0,374055	16,787	16	
25	3,440693	0,588741	10,672	10	
26	1,525110	1,427198	4,402	4	

С учетом точки в нижнем полюсе всего 897 точек.

Таблица 5. Расчеты при соотношениях радиусов ( $r/R = 1/23$ ;  $\beta = 0,08690179$ )

№№ рядов	$R_k/r$	$\alpha_k$	$\approx n_k$	$]n_k[$	примечания
1	1,996226	1,048283	5,994	6	
2	3,977386	0,507804	12,373	12	
3	5,928529	0,388648	16,667	16	
4	7,784927	0,255720	24,571	24	
5	9,682195	0,206736	30,392	30	
6	11,456389	0,174632	35,980	36	
7	13,144120	0,152161	41,293	41	
8	14,732650	0,135728	46,292	46	
9	16,209990	0,123342	50,941	50	
10	17,564991	0,113816	55,205	55	
11	18,787425	0,106404	59,050	59	
12	19,868068	0,100602	62,456	62	
13	20,798763	0,096097	65,384	65	
14	21,572486	0,092653	67,814	67	
15	22,183398	0,090111	69,727	69	
16	22,626889	0,088329	71,134	71	
17	22,899610	0,087282	71,987	71	
18	23,058580	0,086681	72,486	72	
19	23,043969	0,086735	72,441	72	
20	22,797257	0,087634	71,698	71	
21	22,379382	0,089312	70,351	70	
22	21,793497	0,091716	68,507	68	
23	21,044025	0,094984	66,150	66	
24	20,136622	0,099269	63,295	63	
25	19,078136	0,104780	59,966	59	
26	17,876556	0,111830	56,185	56	
27	16,540950	0,120871	51,983	51	
28	15,081398	0,132585	47,390	47	
29	13,508917	0,148045	42,411	42	
30	11,835372	0,169025	37,173	37	
31	10,073396	0,198681	31,624	31	
32	8,236287	0,243197	25,286	25	
33	6,337908	0,316582	19,847	19	
34	4,392587	0,458896	13,692	13	
35	2,415007	0,852996	7,366	7	
36	0,420090	Не определена		1	
			$\sum n$	1651	

С учетом точки в нижнем полюсе имеем 1652 точек, центров описанных непересекающихся кругов радиусами  $r = R/23$ ;

при диаметре описанных кругов  $d = 0,086874R$  (максимальное значение из минимальных расстояний между рядомстоящими точками).

Согласно данным из таблицы № 3 находим средние отношения площадей описанных кругов к площади поверхности сферы.

$$\theta = \frac{\sum n \frac{\pi d^2}{4}}{4\pi R^2} * 0,25 * 100\%; \quad (5)$$

$\pi$  и  $R^2$  сокращаются и мы получим средние показатели:

$$\frac{150(0,282843)^2}{16} = 0,75 ;$$

$$\frac{536(0,153393)^2}{16} = 0,7882 ;$$

$$\frac{897(0,117444)^2}{16} = 0,7733 ;$$

$$\frac{1652(0,086874)^2}{16} = 0,7792 ;$$

$$\theta = \frac{0,75+0,7882+0,7733+0,7792}{4} * 100\% = 77,27\%$$

В тех случаях , когда задаются количество точек на поверхности сферы ,для определения требуемых значений между соседними точками применим обратную формулу :

$$d \approx 4R \sqrt{\frac{\theta_{\text{ср.}}}{N}} ; \text{ где } (6)$$

d -- требуемое значение расстояния между соседними точками;

R -- Радиус заданной сферы;

N -- Заданное количество точек на поверхности сферы;

$\theta_{\text{ср.}}$  – средний коэффициент плотности расположения точек на поверхности сферы.

Затем, используя формулы (5) и (6), в табличной форме вычисляем количество фактических точек при расчетном расстоянии между точками, при неравенстве фактического числа точек с заданными значениями введем корректировку расстояния между точками в ту или иную сторону.

**Пример:** Как разместить N = 125 точек на сфере, чтобы наименьшее из попарных расстояний было максимальным?

$$d_{\text{расч.}} \approx 4R \sqrt{\frac{0,7727}{125}} \approx 0,314493 R ;$$

$$\beta \approx 2 \arctg \frac{0,314493}{2} \approx 0,31193869 ;$$

$$\left] \frac{2\pi}{\beta} [ = \left] \frac{2\pi}{0,31193869} [ = ]20,142[ = 20 ;$$

Таблица 6. Определение расстояния между точками при известном количестве заданных точек

№№ рядов k	$R_k$	$\alpha_k$	$\approx n_k$	$]n_k[$	примечания
1	1,951740	1,075869	5,840	5	
2	3,715100	0,545066	11,527	11	
3	5,119881	0,393161	15,981	15	
4	6,030495	0,333187	18,858	18	
5	6,359050	0,316444	19,856	19	
6	6,173758	0,325386	19,310	19	
7	5,302300	0,379467	16,558	16	
8	3,928712	0,514736	12,207	12	
9	2,185573	0,950467	6,611	6	
10	0,241128	-----		1	

С учетом точки на нижнем полюсе всего 123 точки. В принципе можно при сдвиге центров кругов в «мертвые зоны» поместить остальные две плановые точки или же незначительная корректировка расстояния между точками с округлением в меньшую сторону даст нам необходимое решение. У нас расчетное расстояние

$$d = 0,314493R ;$$

За решение задачи окончательно принимаем

$$d = 0,3144 * R .$$

### *Список литературы*

1. Справочник по элементарной математике. Москва, 1972 г. С. 284.