АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ С ПОЛОСТЬЮ В СРЕДЕ

Абыкеев К.Дж.

Абыкеев Капарбек Джолдошбекович - старший преподаватель,
кафедра компьютерной лингвистики и межкультурной коммуникации,
Институт новых информационных технологий
Кыргызский государственный университет строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова,
г. Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *в данной работе излагается алгоритм численного решения системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие волны с полостью в среде.*
Ключевые слова: *упругая волна, полость в среде, волновые потенциалы, уравнения среды, потенциалы упругих смещений, метод трапеции.*

В работе [1] было выведена система интегро-дифференциальных уравнений, к которой сводится задача о взаимодействии упругой волны с полостью в среде, в виде:

$$\sigma_t(0,t)=\frac{4a}{\lambda+4\mu}\{g_1(0,t)-\Big[\mu\gamma_x(0,t)-\mu f_{x^1x^1}(0)\sigma(0,t)+\frac{\lambda+4\mu}{8\pi}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sigma(\delta_1\cos\theta,\delta_1\sin\theta,t-\delta_1/a)}{\delta_1}d\theta+\frac{1}{4\pi}\int_{L_1(t)}^{L_2(t)}dl\int_{\omega_1(1,\delta_1)}^{y(1,t)}(\sigma(l,t-r/a)+\frac{r}{a}\sigma_t(l,t-r/a))$$

$$(\frac{3(\lambda x^{1^2}+(\lambda+2\mu)z^{1^2})}{r^5}-\frac{2(\lambda+\mu)}{r^3}dy^1-\frac{1}{2\pi a}\int_{L_1(t)}^{L_2(t)}(\lambda x^{1^2}+(\lambda+2\mu)z^{1^2})dl\int_{\omega_1(1,\delta_1)}^{y(1,t)}(\sigma(l,t-r/a)-$$

$$\sigma_t(l,t-\frac{1}{a}\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2}))(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2y^{1^2}})dy^1+\frac{1}{2\pi a}\int_{L_1(t)}^{L_2(t)}\chi_1(l,\delta_1)(\lambda x^{1^2}+(\lambda+2\mu)z^{1^2})$$

$$\frac{\sigma_t(l,t-1/a\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2})}{r^2y(l,t)}dl-\frac{3\mu}{2\pi}\int_{L_3(t)}^{L_4(t)}dl\int_{\omega_2(l,\delta_2)}^{\bar{y}(l,t)}((\gamma(l,t-r/b)+\frac{r}{b}\gamma_t(l,t-r/b))/r^5)dy^1+$$

$$\frac{\mu}{\pi b}\int_{L_3(t)}^{L_4(t)}\chi_2(l,\delta_2)x^1z^1\frac{\gamma_t(l,t-1/b\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2})}{r^2\bar{y}(l,t)}dl]\}+\bar{R}_1(t,\delta_1,\delta_2), \qquad (1)$$

где $\bar{R}_1(t,\delta_1,\delta_2)=0(\delta_1)+0(\delta_2)$.

$$\frac{\mu}{b\pi}\int_{L_3(t)}^{L_4(t)}x^1z^1dl\int_{\omega_2(1,\delta_2)}^{\bar{y}(1,t)}\gamma(l,t-r/b)-\gamma_t(l,t-1/b\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2}))(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2y^{1^2}})dy^1-$$

$$\gamma_t(0,t)=\frac{4b}{3}\left\{\frac{1}{\mu}g_2(0,t)-\left[\frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma(\delta_2\cos\theta,\delta_2\sin\theta,t-\delta_2/a)}{\delta_2}d\theta-\sigma_x(0,t)-f_{x^1x^1}(0)\gamma(0,t)\right.\right.$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int_{L_3(t)}^{L_4(t)}dl\int_{\varpi_2(1,\delta_2)}^{\bar{\gamma}(1,t)}(\gamma(1,t-r/b)+\frac{r}{b}\gamma_t(1,t-r/b))\frac{z^{1^2}-x^{1^2}}{r^5}dy^1-\frac{1}{2\pi b}\int_{L_3(t)}^{L_4(t)}(z^{1^2}-x^{1^2})dl$$

$$\int\limits_{\varpi_2(1,\delta_2)}^{\bar{\gamma}(1,t)} (\gamma_t(1,t-r/b) - \gamma_1(1,t-\frac{1}{b}\sqrt{x^{1^2} + (f(x^1))^2}))(\frac{2}{r^4} + \frac{1}{r^2 y^{1^2}})dy^1 + \frac{1}{2\pi b}\int\limits_{L_3(t)}^{L_4(t)} \chi_2(1,\delta_2)(z^{1^2} - x^{1^2})$$

$$\frac{\gamma_1(1,t-\frac{1}{b}\sqrt{x^{1^2} + (f(x^1))^2})}{r^2\bar{y}(1,t)}dl + \frac{3}{2\pi}\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)} dl \int\limits_{\varpi_1(1,\delta_2)}^{y(1,t)} ((\sigma(1,t-r/a) + \frac{r}{a}\sigma_t(1,t-r/a))/r^5)dy^1 -$$

$$\frac{1}{a\pi}\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)} x^1 z^1 dl \int\limits_{\varpi_1(1,\delta_1)}^{y(1,t)} (\sigma(1,t-r/a) - \sigma_1(1,t-1/a\sqrt{x^{1^2} + (f(x^1))^2}))(\frac{2}{r^4} + \frac{1}{r^2 y^{1^2}})dy^1 +$$

$$\frac{1}{\pi a}\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)} \chi_1(1,\delta_1)x^1 z^1 \frac{\sigma_1(1,t-\frac{1}{b}\sqrt{x^{1^2} + (f(x^1))^2})}{r^2 y(1,t)}dl]\} + \overline{R_2}(t,\delta_1,\delta_2), \qquad (2)$$

где $\overline{R_2}(t,\delta_1,\delta_2) = 0(\delta_1) + 0(\delta_2)$.

Для решения данной системы уравнений можем воспользоваться следующим численным методом. Фиксируется ряд моментов времени:

$t_0, t_1, t_2, \cdots t_M$, изменяющихся с выбранным шагом Δt, причем $t_0 = 0$.

Для каждого из этих моментов времени определяются значения $\sigma_t, \sigma_x, \sigma$, $\gamma_t, \gamma_x, \gamma$ вдоль линии L для двух последовательностей ее точек. Точки каждой из упомянутых последовательностей расположены равномерно на линии L.

В точках одной из последовательности определяются значения $\sigma_t, \sigma_x, \sigma$. Обозначим ее шаг через $\Delta_1 l$. В точках другой последовательности определяются значения $\gamma_t, \gamma_x, \gamma$. Ее шаг обозначим через $\Delta_2 l$. Принимается:

$$\Delta_1 l = a\Delta t, \Delta_2 l = b\Delta t, \delta_1 = \Delta_1 l, \delta_2 = \Delta_2 l$$

Допустим, что в момент t_1 и предшествующие ему моменты значения $\sigma_t, \sigma_x, \sigma, \gamma_t, \gamma_x, \gamma$ определены в надлежащих для них точках линии L. Покажем, как найти значения указанных величин для момента t_{i+1}. Прежде всего в точках соответствующих последовательностей, указанных выше, определяется для момента t_{i+1} значения σ и $\bar{\gamma}$ по формулам:

$$\sigma^{(i+1)} = \sigma^{(i)} + \sigma_t^{(i)}\Delta t, \qquad (3)$$

$$\gamma^{(i+1)} = \gamma^{(i)} + \gamma_t^{(i)}\Delta t \qquad (4)$$

причем здесь и ниже верхний индекс i указывает то, что величина относится к моменту t_i, а индекс (i+1) означает, что она относится к моменту t_{i+1}. Если значения $\sigma^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$ вычисляются с точностью до малых величин порядка σ_1, σ_2, то очевидно, при использовании формул (3), (4) допускается погрешность порядка δ_1^2, δ_2^2.

После нахождение значений $\sigma^{(i+1)}, \gamma^{(i+1)}$ определяются с использованием какой-либо формулы численного дифференцирования значения $\sigma_x^{(i+1)}, \gamma_x^{(i+1)}$. Затем вычисляются значения $\sigma^{(i+1)}$ согласно (21), при этом отбрасывается величина $\overline{R_1}(t,\delta_1,\delta_2)$, и значения $\gamma^{(i+1)}$ согласно (23), при этом отбрасывается величина $\overline{R_2}(t,\delta_1,\delta_2)$ приводит согласно (22), (24) к погрешности порядка $\delta_1 + \delta_2$.

Заметим, что после отбрасывания величина $\overline{R_1}(t,\delta_1,\delta_2)$, $\overline{R_2}(t,\delta_1,\delta_2)$ в (21), (23) соответственно, правые части этих соотношений в момент t_{i+1} становятся известными. В самом деле, так как в подынтегральные выражения время входит вместе с комбинациями $t-r/a$, $t-r/b$, то в силу выбора шагов: $\Delta_1 1=\delta_1=a\Delta t, \Delta_2 1=\delta_2=b\Delta t,$ значения $\sigma_t,\sigma,\gamma_t,\gamma^1$ в подынтегральных выражениях относятся к моментам времени, предшествующим t_i, для которых они уже определены.

После определения значений $\sigma_t^{(i+1)},\gamma_t^{(i+1)}$ описанные выше вычисления производятся для момента t_{i+2} и т.д. пока не будут исчерпаны все моменты предусмотренного временного ряда.

Введем для подынтегральных функций в (1), (2) обозначения:

$$F_1(i,\delta_1,\theta,t)=\sigma(1,t-\delta_1/a)$$

$$F_2(i,1,y',t)=\sigma(1,t-r/a)+\frac{r}{a}\sigma_t(1,t-r/a)\times\frac{3(\lambda x'^2+(\lambda+r\mu)z'^2)}{2^5}-\frac{2(\lambda+\mu)}{r^3}$$

$$F_3(i,1,y',t)=(\sigma_t(1,t-r/a)-\sigma_t(1,t-r/a))\times(\frac{2}{2^4}+\frac{1}{2^2y^{12}})$$

$$F_4(i,1,\delta_1',t)=\chi(1,\delta_1)(\lambda\chi^{12}+(\lambda+2\mu)z^{12})\frac{\sigma_t(1,t-r/a)}{r^2(1,t)}$$

$$F_5(i,1,y',t)=(\gamma(1,t-r/b)+\frac{r}{b}\gamma_t(1,t-r/b))/r^5$$

$$F_6(i,1,y',t)=(\gamma_1(1,t-r/b)-\gamma_t(1,t-r*/b))/(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2+y'^2})$$

$$F_7(i,1,\delta_2',t)=\chi_2(1,\delta_2)\frac{\gamma_t(1,t-r*/b)}{r^2\bar{Y}(1,t)}x'z'$$

$$G_1(i,\delta_2',\theta,t)=\gamma(1,t-\delta_2/b)$$

$$G_2(i,1,y',t)=(\gamma(1,t-r/b)+\frac{r}{b}\gamma_t(1,t-r/b))\frac{z'^2-x'^2}{r^5}$$

$$G_3(i,1,y',t)=(\gamma_1(1,t-r/b)-\gamma_t(1,t-r/b))/(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2+y'^2})$$

$$G_4(i,1,\delta_2',t)=\chi_2(1,\delta_2)\frac{\gamma_t(1,t-r*/b)}{r^2\bar{Y}(1,t)}x'^2z'^2$$

$$G_5(i,1,y',t)=(\sigma(1,t-r/b)+\frac{a}{b}\sigma_t(1,t-a/b))/r^5$$

$$G_6(i,1,y',t)=(\sigma_1(1,t-r/a)-\sigma_t(1,t-r*/a))/(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2+y'^2})$$

$$G_7(i,1,\delta_1',t)=\chi_1(1,\delta_1)\frac{\sigma_t(1,t-r*/b)}{r^2Y(1,t)}x'z'$$

Для вычисления системы интегралов в (1) и (2) используется формула трапеции. Для интегрирования полагаем:

$$\Phi_1(i,M_1\delta_1,t)=\frac{\lambda+4\mu}{4\pi\delta_1}\Delta\theta[0.5(F_{10}+F_{1M_1})+F_{11}+F_{12}+...+F_{1,M_1-1}]$$
$$\Phi_2(i,1,A,B,\Delta\bar{y},t)=\Delta y[0.5(F_{20}+F_{2M})+F_{21}+F_{22}+...+F_{2,M-1}]$$
$$\Phi_3(i,1,A,B,\Delta\bar{y},t)=\Delta y[0.5(F_{30}+F_{3M})+F_{31}+F_{32}+...+F_{3,M-1}]$$
$$\Phi_4(i,C,D,\Delta\bar{x},t)=\frac{1}{2\pi a}\Delta x[0.5(F_{40}+F_{4M})+F_{41}+F_{42}+...+F_{4,M-1}]$$
$$\Phi_5(i,1,A,B,\Delta\bar{y},t)=\Delta y[0.5(F_{50}+F_{5M})+F_{51}+F_{52}+...+F_{5,M-1}]$$
$$\Phi_6(i,1,A,B,\Delta\bar{y},t)=\Delta y[0.5(F_{60}+F_{6M})+F_{61}+F_{62}+\ldots+F_{6,M-1}]$$
$$\Phi_7(i,C,D,\Delta\bar{x},t)=-\frac{M}{\pi b}\Delta\bar{x}[0.5(F_{70}+F_{7M})+F_{71}+F_{72}+\ldots+F_{7,M-1}]$$
$$\psi_1(i,M_2,\delta_2 t)=-\frac{3}{4\pi\delta_1}\Delta\theta[0.5(G_{10}+G_{1M_2})+G_{11}+G_{12}+\ldots+G_{1,M_2-1}]$$
$$\psi_2(i,l,A,B,\Delta\bar{y},t)=\Delta y[0.5(G_{20}+G_{2M})+G_{21}+G_{22}+\ldots+G_{2,M-1}]$$
$$\psi_3(i,l,A,B,\Delta\bar{y},t)=\Delta y[0.5(G_{30}+G_{3M})+G_{31}+G_{32}+\ldots+G_{3,M-1}]$$
$$\psi_4(i,C,D,\Delta\bar{x},t)=\frac{1}{2\pi b}[0.5(G_{40}+G_{4M})+G_{41}+G_{42}+\ldots+G_{4,M-1}]$$
$$\psi_5(i,l,A,B,\Delta\bar{y},t)=\Delta y[0.5(G_{50}+G_{5M})+G_{51}+G_{52}+\ldots+G_{5,M-1}]$$
$$\psi_6(i,l,A,B,\Delta\bar{y},t)=\Delta y[0.5(G_{60}+G_{6M})+G_{61}+G_{62}+\ldots+G_{6,M-1}]$$
$$\psi_7(i,C,D,\Delta\bar{x},t)=\frac{1}{a\pi}\Delta x[0.5(G_{70}+G_{7M})+G_{71}+G_{42}+\ldots+G_{7,M-1}]$$
$$C_{22}(i,A_1,A_2,\Delta\bar{x},t)=\Delta x[0.5(\Phi_{20}+\Phi_{2N})+\Phi_{21}+\Phi_{22}+\ldots+\Phi_{2,N-1}]$$
$$C_3(i,\delta_1,\Delta\bar{x},t)=\frac{\Delta x}{2\pi a}[0.5(\Phi_{30}+\Phi_{3N})+\Phi_{31}+\Phi_{32}+\ldots+\Phi_{3,N-1}]$$
$$C_5(i,\delta_2,\Delta\bar{x},t)=\Delta x[0.5(\Phi^*_{50}+\Phi^*_{5N})+\Phi^*_{51}+\Phi^*_{52}+\ldots+\Phi_{5,N-1}]$$
$$Д_{22}(i,A_1,A_2,\Delta\bar{x},t)=\Delta x[0.5(\psi_{20}+\psi_{2N})+\psi_{21}+\psi_{22}+\ldots+\psi_{2,N-1}]$$
$$Д_3(i,\delta_2,\Delta\bar{x},t)=\frac{\Delta x}{2\pi b}[0.5(\psi_{30}+\psi_{3N})+\psi_{31}+\psi_{32}+\ldots+\psi_{3,N-1}]$$
$$Д_5(i,\delta_2,\Delta\bar{x},t)=\Delta x[0.5(\psi^*_{50}+\psi^*_{5N})+\psi^*_{51}+\psi^*_{52}+\ldots+\psi^*_{5,N-1}]$$

Обратимся теперь непосредственно к численному решению системы интегро-дифференциальных уравнений (1) и (2).

Допустим, что момент времени $t^{(m)}=m\Delta t$ и предшествующие ему моменты $t^{(1)},t^{(2)},\ldots\ldots,t^{(m-1)}$ рассматриваемого временного ряда известны значения $\sigma(e,t),\sigma_t(l,t)$ в точках последовательности I_1, а также значения $\gamma(l,t)$, $\gamma_t(l,t)$ в точках последовательности I_2.

Тогда, прежде всего, полагаем:

для точек последовательности I_1 при $k=0,1,2,\ldots N_{1^-}$ $\sigma_{k,m+1}=\sigma_{km}+(\sigma_t)_{km}\Delta t$ для точек последовательности I_2 при $k=0,1,2,\ldots N_{2^-}$ $\gamma_{k,m+1}=\gamma_{km}+(\gamma_t)_{km}\Delta t$

Затем с использованием (44), (46), где отбрасываем слагаемые

$\overline{R}_1(t,\delta_1,\delta_2)$, $\overline{R}_2(t,\delta_1,\delta_2)$ полагаем: $t^{(m+1)} = (m+1)\Delta t$, для точек последовательности I_1 при $k = 0,1,2,\ldots N_1/2 -$

$$K^* = \operatorname{int}(k\Delta l_1/\Delta l_2) \qquad \gamma^*{}_k = \left(\gamma_{k^*+1,m+1} - \gamma_{k^*{}_1+m+1}\right)/\Delta l_2,$$

$$(\sigma_t)_{k,m+1} = \frac{4a}{\lambda+4\mu}\left\{g_и\left(k,t^{(m+1)}\right) - \left[\mu\gamma_k^* - \mu f_k^{(1)}\sigma_{k,m+1} + \Phi_1(k,50,\delta_1,t^{(m+1)}) + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{4\pi}c_2\left(K_1,\delta_1,\Delta l_1,t^{(m+1)}\right) + C_3\left(K_1,\delta_1,\Delta l_1,t^{(m+1)}\right) + \Phi_4\left(i,0,1^*,\Delta l_2,t^{(m+1)}\right) +$$

для

$$\left.\left.C_5\left(K_1,\delta_2,\Delta l_2,t^{(m+1)}\right) + \Phi_7\left(i,0,1^*,\Delta l_2,t^{(m+1)}\right)\right]\right\}$$

После этого принимаем: для точек последовательности I_1 при $k = N_1/2+1,\ N_1/2+3,\ldots\ldots,N_{1^-}$ $(\sigma_t)_{k,m+1} = (\sigma_t)_{N_1-k,m+1}$ I_2 при

$k = N_2/2+1,\ N_2/2+2,\ N_2/2+3\ldots\ldots,N_{2^-}$ $(\gamma_t)_{k,m+1} = (\gamma_t)_{N_2-k,m+1}$.

На этом очередной цикл вычислений заканчивается. Он повтояется до тех пор, пока не будет исчерпан временной ряд. Можно закончить вычисления и, исходя из условия $t^{(m+1)} \geq T$, где T задаваемый момент времени.

Список литературы

1. Вестник Кыргызского государственного университета строительство, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова. Международная научно-практическая конференция. Серия № 2 (32). Том 2. Бишкек, 2011. 145 – 151 с.