ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА АДАМСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Джумабекова А.С.

Джумабекова Айнагуль Сериковна – магистрант,
кафедра математического и компьютерного моделирования
Международный университет информационных технологий,
г. Алматы, Республика Казахстан

Аннотация: *в статье рассматривается интервальное расширение метода Адамса, применимое для уравнений с запаздыванием.*
Ключевые слова: *интервальный анализ, дифференциальные уравнения с запаздыванием, метод Адамса.*

Введение

С каждым днем интерес к интервальному анализу растет, так как при постановке и решении инженерных и практических задач наиболее адекватным представлением данных является интервал. Таким образом, указываются только границы возможных значений некоторой величины и с помощью методов интервального анализа разрешается неопределенность. Величина, заданная интервалом, может быть представлена только пределами её изменений, мерой интервала является ширина диапазона значений.

Важную часть интервальная арифметика занимает при вычислениях на компьютере. По отношению к традиционным вычислениям, когда в расчет берутся только точные значения данных, без учета ошибки округления, полученная интервальная величина гарантированно содержит корректный результат в промежутке между нижним и верхним пределом значений.

Основные положения интервальной арифметики

Интервалом назовем следующую величину $[a,b]=\{x \mid x \in R, a \le x \le b\}$

Основные операции записываются следующим образом [1]:

$$A=[a,b], B=[c,d]$$

$$A+B=[a+c, b+d]$$

$$A-B=[a-c, b-d]$$

$$A*B=[\min\{ac,ad,bc,bd\}, \max\{ac,ad,bc,bd\}]$$

$$A/B=[a,b]*[1/d, 1/c]$$

Таким образом, результатом каждой из четырех основных операций является интервал, значения которого, соответствуют точному диапазону каждого набора значений из областей интервалов-операндов при выполнении над ними определенной операции

Метод Адамса

Пусть задано следующее дифференциальное уравнение

$$y' = f(t, y(t)), a \le t \le b$$

$$y(0) = y_0$$

Разобьем отрезок от a до b на n равных частей, тогда значение функции в каждой точке будет вычисляться по следующей формуле:

$$y(n+1) = y(n) + \frac{h}{24}(55f(y_n) - 59f(y_{n-1}) + 37f(y_{n-2}) - 9f(y_{n-3}))$$

Первые три значения вычисляются с помощью метода Рунге-Кутта.

Интервальное расширение метода Адамса

Задается дифференциальное уравнение, причем каждая переменная задана на определенном множестве [1]

$$y' = f(x, y),$$

$$y(0) = y_0$$

$$(x, y) \in \Delta_x \otimes \Delta_y$$

Рассмотрим интервальное расширение для каждой переменной $X \subset \Delta_x; Y \subset \Delta_y$

Решение заданного уравнения является интервальная функция, определённая следующим образом

$$Y(n+1)=Y(n)+\frac{h}{24}(55F(Y_n)-59F(Y_{n-1})+37F(Y_{n-2})-9F(Y_{n-3}))+\frac{251}{720}\Psi(Y_n+[-3h,0]F(\Delta_y))h^5$$

где

$$\Psi(y)= f(f')^4+11f^2(f')^2 f''+7f^3 f'f'''+4f^3(f'')^2+f^4 f^{(IV)}$$

Численный эксперимент

Рассмотрим интервальный метод Адамса для динамической математической модели взаимосвязи белков p53-Mdm2. Она представляет собой следующую систему уравнений с запаздывающим аргументом [4]:

$$x_1'(t)=1-b_1x_1(t) \quad (1)$$

$$y_1'(t)=x_1(t)-(a_1+a_{12}y_2(t))y_1(t) \quad (2)$$

$$x_2'(t)=f(y_1(t-\tau))-b_2x_2(t) \quad (3)$$

$$y_2'(t)=x_2(t)-a_2y_2(t) \quad (4)$$

где функция $f(x)$ является функцией Хилла

$$f(x)=\frac{x^n}{a+x^n},\ a>0, n\in N$$

Также известно из [5], следующие соотношения

$$x_1(0)=x_{10}=\frac{1}{b_1}, y_1(0)=y_{10}, x_2(0)=x_{20}=\frac{1}{b_2}f(y_{10}), y_2(0)=y_{20}=\frac{f(y_{10})}{b_2(a_2+a_{21}y_{10})},$$

Варьируя численные параметры модели $a_i, b_i, a_{12}\in(0,1], i=1,2$, сможем проверить устойчивость метода Адамса для решения уравнений с запаздывающим аргументом

Интервальная арифметика была реализована в среде Matlab.

При изменении начальных параметров на 1%, результаты получили колебания в пределе 5%. Таким образом, можно сделать вывод о том, что метод устойчив для решения дифференциальных уравнений с запаздыванием

Выводы

Как показывает практика в современном мире компьютерных вычислений необходимо учитывать ошибку округления, которая накапливается и мешает получить верные результаты. Для данного рода проблем подходит интервальный анализ, который рассматривает величины как диапазон предельных значений. Также интервальная арифметика помогает проверить устойчивость метода при стрессовом возмущении. Был рассмотрено интевальное расширение метода Адамса, и показана его устойчивость для динамической математической модели взаимосвязи белков p53 и Mdm2.

Список литературы

1. *Калмыков С.А.* Методы интервального анализа / *С.А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев.* Новосибирск: Наука, 1986.
2. *Tiana G., Jensen M.H., Sneppen K.* Time delay as a key to apoptosis induction in the p53 network // Europ. Phys. J.B., 2002. Vol. 29. P. 135–140.
3. *Horhat F.R., Neamtu M., Mircea G.* Mathematical models and numerical simulations for the P53—Mdm2 network // Appl. Sci., 2008. Vol. 10. P. 94–106.
4. *Mihalaş G.I., Neamţu M., Opriş D., Horhat R.F.* A dynamic P53-MDM2 model with time delay // Chaos, Solitons & Fractals 30 (4). 936-945.
5. *Mircea G., Neamtu M., Opris D.* Hopf bifurcations for dynamical systems with time delay and application // Mirton Publishing House, Timisoara.
6. *Hoo Yann Seong, Zanariah Abdul Majid, Fudziah Ismail* Solving Second-Order Delay Differential Equations by Direct Adams-Moulton Method // Volume 2013, 2013. Article ID 261240. 7 pages.