АКСЕЛЕРАТОРЫ В МАКРОЭКОНОМИКЕ: СРАВНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО И НЕПРЕРЫВНОГО ПОДХОДОВ

Тарасова В.В.[1], Тарасов В.Е.[2]

[1]*Тарасова Валентина Васильевна – магистрант,*
Высшая школа бизнеса,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;
[2]*Тарасов Василий Евгеньевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,*
Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
г. Москва

Аннотация: *в статье доказывается, что уравнение акселератора с дискретным временем нельзя рассматривать как точный дискретный аналог уравнения акселератора с непрерывным временем. В силу этого макроэкономические модели с дискретным временем нельзя рассматривать как точную дискретизацию соответствующих моделей с непрерывным временем. В результате уравнения дискретных и непрерывных макроэкономических моделей имеют разные решения и могут предсказывать разное поведение экономики. В этой статье предлагается самосогласованное дискретное описание экономических акселераторов, основанное на точных конечных разностях. Для моделей с дискретным временем уравнения с точными конечными разностями имеют те же решения, что и соответствующие модели с непрерывным временем, и эти дискретные и непрерывные модели описывают одно и то же поведение экономики. Используя модель Харрода-Домара в качестве примера, мы показываем, что уравнения модели с непрерывным временем и предлагаемая дискретная модель имеют одинаковые решения, и эти модели предсказывают одинаковое поведение экономики.*
Ключевые слова: *макроэкономика, акселератор, точные конечные разности, модель Харрода-Домара.*

1. Введение

Экономический акселератор является важнейшей концепцией макроэкономической теории [1, 2, 3]. Акселераторы можно рассматривать в моделях с непрерывным и дискретным временем. Акселераторы с непрерывным временем математически описываются уравнениями с производными первого порядка. Дискретные акселераторы описываются уравнениеми с конечными разностями. Одной из простейших макроэкономических моделей, которая использует концепцию акселератора, является модель Харрода-Домара, предложенная в работах [4, 5, 6, 7, 8]. Известно, что модель Харрода-Домара с непрерывным временем [1, с. 75-76], [2, с. 64-66] и модель Харрода-Домара с дискретным временем [1, с. 83-84] [2, с. 74-76] не являются эквивалентными. Аналогичная ситуация наблюдается и с другими моделями в макроэкономике. Макроэкономические модели с дискретным временем не могут рассматриваться как точные дискретные аналоги моделей с непрерывным временем. Уравнения этих моделей имеют разные решения и могут предсказывать различное поведение экономики. В этой связи важно описать причины отсутствия эквивалентности дискретных и непрерывных моделей.

Хорошо известно, что стандартные конечные разности целых порядков не могут рассматриваться как точные дискретизации производных этих же порядков. Поэтому уравнения акселераторов с дискретным временем, использующие стандартные конечные разности, нельзя рассматривать как точные дискретные аналоги дифференциальных уравнений акселераторов, использующих производные первого порядка. Чтобы определить дискретный акселератор, являющийся точным дискретным аналогом акселератора с непрерывным временем, важно рассмотреть соответствие между непрерывными и дискретными методами описания. Задача точной дискретизации дифференциальных уравнений целых порядков была сформулирована Поттсом [9, 10] и Микенсом [11, 12, 13] (см. также [14, 15, 16]). Доказано, что для дифференциальных уравнений существует конечно-разностная дискретизация такая, что локальные ошибки усечения равны нулю. Основным недостатком такого подхода к дискретизации является то, что предлагаемые нестандартные конечные разности зависят от вида рассматриваемого дифференциального уравнения и параметров, входящих в него. Кроме того, эти нестандартные разности не имеют тех же алгебраических свойств, что и стандартные производные целого порядка. Недавно в работах [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] был предложен новый подход к точной дискретизации. Этот подход основан на принципе универсальности и принципе алгебраического соответствия [18]. Точные конечные разности обладают свойством универсальности, если они не зависят от формы и параметров рассматриваемых дифференциальных уравнений. Алгебраическое соответствие означает, что точные конечные разности должны удовлетворять тем же алгебраическим отношениям, что и производные. В этой статье мы предлагаем самосогласованное дискретное описание экономических акселераторов, основанное на точных конечных разностях, которые были предложены в [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

2. Акселератор

В макроэкономике акселератор описывает то, как изменяется значение эндогенной переменной (например, индуцированных инвестиций I(t)) в ответ на изменения скорости роста экзогенной переменной (например, дохода Y(t)). Формулировка акселератора зависит от того, используется ли непрерывный или дискретный анализ. Простейшее выражение линейного акселератора в непрерывной форме без запаздывания [1, с. 73], [2, с. 62-63] имеет вид

$$I(t) = v \cdot \frac{dY(t)}{dt}, \qquad (1)$$

где dY(t)/dt – скорость роста выпуска продукции (скорость роста дохода), I(t) – функция, описывающая индуцированные инвестиции в момент времени t, а v – положительная постоянная, коэффициент инвестиционного акселератора, указывающий мощность акселератора. Из уравнения (1) следует, что индуцированные инвестиции являются постоянной долей текущей скорости изменения выпуска продукции.

В дискретном анализе, уравнение линейного акселератора без запаздывания [1, с. 74], [2, с. 63] записывается в виде

$$I_t = v \cdot (Y_t - Y_{t-1}), \qquad (2)$$

где $Y_t = Y(t), I_t = I(t)$ при целых значениям t=0. 1, 2, 3, …, t [1, с. 40], то есть предполагается единичный шаг дискретизации (T=1),. Дискретное уравнение (2) соответствует уравнению (1). В дискретном подходе с произвольным шагом дискретизации (T>0), уравнение линейного акселератора может быть записано в виде

$$I_n = \frac{v}{T} \cdot (Y_n - Y_{n-1}), \qquad (3)$$

где $Y_n = Y(nT)$, $I_n = I(nT)$, и T – положительная постоянная, задающая масштаб времени. Если T=1, то тогда t=n и $Y_n = Y_t$. В этом случае уравнение (3) принимает вид (2). Уравнения (2) и (3) означают, что индуцированные инвестиции (капиталовложения) зависят от изменения текущего выпуска продукции [1, с. 74], [2, с. 63].

Используя стандартные конечные разности, такие как обратная конечная разность $\Delta_b^1 Y(t) \coloneqq Y(t) - Y(t-1)$, уравнение (2) может быть записано в виде

$$I(t) = v \cdot \Delta_b^1 Y(t). \qquad (4)$$

Уравнения (2), (3) и (4) не могут рассматриваться как точные дискретные аналоги уравнения (1). Этот факт обусловлен тем, что стандартные конечные разности, такие как $\Delta_b^1 Y(t) \coloneqq Y(t) - Y(t-1)$ и $\Delta_f^1 Y(t) \coloneqq Y(t+1) - Y(t)$, не обладают теми же характеристическими свойствами, что и производная первого порядка [17, 18, 19]. Например, стандартное правило Лейбница (правило дифференцирования произведения), являющееся характеристическим свойством производных, нарушается для стандартных конечных разностей [17, 18], то есть, в общем случае, мы имеем неравенство

$$\Delta_b^1 \left(X_1(t) \cdot X_2(t)\right) \neq \left(\Delta_b^1 X_1(t)\right) \cdot X_2(t) + X_1(t) \cdot \left(\Delta_b^1 X_2(t)\right). \qquad (5)$$

Например, для обратной разности правило Лейбница имеет нестандартный вид

$$\Delta_b^1 \left(X_1(t) \cdot X_2(t)\right) = \left(\Delta_b^1 X_1(t)\right) \cdot X_2(t) + X_1(t) \cdot \left(\Delta_b^1 X_2(t)\right) - \left(\Delta_b^1 X_1(t)\right) \cdot \left(\Delta_b^1 X_2(t)\right). \qquad (6)$$

Для сравнения действия производной и стандартных конечных разностей на некоторые элементарные функции мы приводим Таблицу 1.

Таблица 1. Действие производных и стандартных конечных разностей на элементарные функции

$f(t)$	$df(t)/dt$	$\Delta_b^1 f(t)$
$\exp(\lambda \cdot t)$	$\lambda \cdot \exp(\lambda \cdot t)$	$\frac{\exp(\lambda) - 1}{\exp(\lambda)} \cdot \exp(\lambda \cdot t)$
$\sin(\lambda \cdot t)$	$\lambda \cdot \cos(\lambda \cdot t)$	$2 \cdot \sin\left(\lambda \cdot t - \frac{\lambda}{2}\right) \cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)$
$\cos(\lambda \cdot t)$	$-\lambda \cdot \sin(\lambda \cdot t)$	$-2 \cdot \sin\left(\lambda \cdot t - \frac{\lambda}{2}\right) \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)$
t^2	$2 \cdot t$	$2 \cdot t - 1$
t^3	$3 \cdot t^2$	$3 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 1$
Таблица 1. Действие производных и стандартных конечных разностей на элементарные функции		

Из Таблицы 1 видно, что действие стандартной конечной разности Δ_b^1 в общем случае не совпадает с действием первой производной. В результате решения уравнений со стандартными конечными разностями в общем случае не совпадают с решениями дифференциальных уравнений, которые получены заменой стандартных конечных разностей на производные соответствующих порядков [18].

Неэквивалентность действия производных и стандартных конечных разностей приводит к тому, что макроэкономические модели с дискретным временем не эквивалентны соответствующим моделям с непрерывным временем. В следующем разделе будет показана неэквивалентность непрерывных и дискретных макроэкономических моделей на примере моделей Харрода-Домара.

3. Модель Харрода-Домара с непрерывным временем

Рассмотрим модель Харрода-Домара с непрерывным временем [1, с. 75-76], [2, с. 64-66]. Если независимые инвестиции A(t) растут, например, в результате внезапного появления крупных изобретений, мультипликатор приводит к росту выпуска продукции равному $A(t)/(1-c)$, где c – предельная величина склонности к потреблению (0<c<1). Расширение выпуска продукции включает акселератор, что приводит к дальнейшему росту индуцированных инвестиций (капиталовложений). Эти дополнительные инвестиции увеличивают выпуск продукции за счет эффекта мультипликатора, что порождает следующий цикл. В результате получается непрерывный рост выпуска продукции.

Модель Харрода-Домара описывает взаимодействие множителя и акселератора в отсутствие запаздывания (лагов) при использовании простейшей формы акселератора. В модели с непрерывным временем все переменные берутся в виде непрерывных функций времени, а уравнение акселератора описывается линейным дифференциальным уравнением. Если выделить независимые (автономные) расходы, как для потребления, так и для инвестиций (капиталовложений), основное уравнение баланса можно записать в виде

$$Y(t) = C(t) + I(t) + A(t), \qquad (7)$$

где Y(t) – выпуск продукции (доход) в момент времени t, C(t) – потребление, I(t) – индуцированные капиталовложения (инвестиции), A(t) – независимые капиталовложения (инвестиции).

Далее в модели предполагается, что функция потребления C(t) описывается линейным уравнением мультипликатора $C(t) = c \cdot Y(t)$, где 0<c<1, а уравнение акселератора имеет вид (1), где v>0. В результате получаем

$$Y(t) = c \cdot Y(t) + v \cdot \frac{dY(t)}{dt} + A(t). \qquad (8)$$

Уравнение (8) можно записать в виде

$$\frac{dY(t)}{dt} = \lambda \cdot Y(t) - \frac{1}{v} \cdot A(t), \qquad (9)$$

где $\lambda = s/v$, а параметр $s = 1 - c$ описывает предельную величину склонности к сбережению. Уравнение (9) является дифференциальным уравнением первого порядка, решение которого описывает динамику эндогенной переменной Y(t), то есть выпуска продукции или дохода. Решение уравнения (9) зависит от динамики независимых расходов A(t). Рассмотрим случай постоянства независимых расходов ($A(t) = A = const$). Обозначим через $y(t)$ отклонение дохода (выпуска продукции) от фиксированного уровня A/s, то есть $y(t) = Y(t) - A/s$ и учтем, что $dy(t)/dt = dY(t)/dt$. В этом случае уравнение (9) можно записать в виде

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lambda \cdot y(t), \qquad (10)$$

где $\lambda = s/v$. Решение уравнения (10) имеет вид

$$y(t) = y(0) \cdot \exp(\lambda \cdot t). \qquad (11)$$

где $y(0)$ – постоянная, описывающая начальный уровень дохода. Используя выражение $y(t) = Y(t) - A/s$, получаем решение уравнения (9) для случая $A(t) = A$ в виде

$$Y(t) = A/s + (Y(0) - A/s) \cdot \exp(\lambda \cdot t). \qquad (12)$$

Решение (12) описывает непрерывный экспоненциальный рост выпуска продукции или дохода с постоянным темпом роста $\lambda = s/v > 0$ для случая постоянства уровня независимых расходов.

4. Модель Харрода-Домара с дискретным временем

Рассмотрим модель Харрода-Домара с дискретным временем [1, с. 83-84], [2, с. 74-76]. Основным предположением данной модели является то, что полнее (в первую очередь) реализуются планы сбережения, а не планы потребления. Данное предположение является одним из обоснований введения запаздывания. В линейном случае, когда исключаются из рассмотрения независимые расходы ($A_t = 0$), функция сбережений имеет вид $S_t = s \cdot Y_{t-1}$, где s – постоянная предельная величина склонности к сбережениям. В общем случае, соотношение $S_t = s \cdot Y_{t-1}$ задает ожидаемую величину сбережений. Однако, поскольку предполагается, что планы сбережений осуществляются в первую очередь, то S_t описывает также и фактическую величину сбережений. Ожидаемая величина потребления описывается выражением $(1-s) \cdot Y_{t-1}$. В силу этого фактическое потребление задается формулой

$$C_t = Y_t - S_t = Y_t - s \cdot Y_{t-1}. \qquad (13)$$

Уравнение баланса, связывающее фактические величины дискретной модели, аналогично уравнению баланса (7) непрерывной модели и имеет вид

$$Y_t = C_t + I_t + A_t, \qquad (14)$$

где I_t – индуцированные капиталовложения (инвестиции), а A_t – независимые капиталовложения. Из уравнений (13) и (14) получаем уравнение $S_t = I_t + A_t$, которое описывает равенство сбережений и всех капиталовложений (инвестиций). Рассмотрим сначала случай отсутствия независимых капиталовложений ($A_t = 0$). Тогда все фактические капиталовложения являются индуцированными и описываются уравнением

$$I_t = S_t = s \cdot Y_{t-1}. \qquad (15)$$

Ожидаемые индуцированные инвестиции (капиталовложения) описываются конечно-разностным уравнением линейного акселератора

$$J_t = v \cdot (Y_t - Y_{t-1}). \qquad (16)$$

Дальнейшее уточнение модели зависит от взаимосвязи между ожидаемыми инвестициями J_t и фактическими капиталовложениями I_t. Гарантированный темп роста выпуска продукции Y_t задается условием равенства фактических и ожидаемых инвестиций ($J_t = I_t$) для всех t, то есть условием реализации всех планов инвестиций. В силу предположения, что планы сбережения реализуются в первую очередь, получаем, что ожидаемые и фактические величины всегда совпадают, как для сбережений, так и для инвестиции. Равенство ожидаемых и фактических величин приводит к уравнению

$$v \cdot (Y_t - Y_{t-1}) = s \cdot Y_{t-1}. \qquad (17)$$

Используя стандартные конечные разности $\Delta_b^1 Y(t) \coloneqq Y(t) - Y(t-1)$, уравнение (17) можно записать в виде

$$\Delta_b^1 Y(t) = \lambda \cdot Y_{t-1}. \qquad (18)$$

где $\lambda = s/v$. Уравнение (17) можно также записать в виде $Y_t = (1+\lambda) \cdot Y_{t-1}$. Решение этого уравнения [1, с. 84], [2, с. 76] имеет вид

$$Y_t = Y_0 \cdot (1+\lambda)^t = Y_0 \cdot \exp\,(t \cdot \ln\,(1+\lambda)). \qquad (19)$$

Решение (19) выражает непрерывный рост выпуска продукции или дохода с постоянным гарантированным темпом роста $\ln\,(1+\lambda)$ в рамках дискретной модели Харрода-Домара.

В случае постоянства уровня независимых расходов ($A(t) = A = const$), уравнение дискретно модели имеет вид

$$\Delta_b^1 Y(t) = \lambda \cdot Y_{t-1} - \frac{A}{v}. \qquad (20)$$

Решение уравнения (20) можно записать [1, с. 146-147], [2, p. 185-186] в виде выражения

$$Y_t = A/s + (Y_0 - A/s) \cdot \exp(t \cdot \ln(1+\lambda)), \qquad (21)$$

которое описывает рост выпуска продукции с постоянным темпом равным $\ln\,(1+\lambda)$.

Если учесть ненулевой шаг дискретизации (T≠1), решение (19) будет иметь вид $Y_t = Y_0 \cdot (1 + \lambda \cdot T)^{t/T}$, где T>0. Совпадение решений для уравнений дискретной и непрерывной моделей Харрода-Домара получается лишь, используя предельный переход $T \to 0$. Используя так называемый замечательный предел $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, выражение (19) в пределе $T \to 0$, принимает вид $Y_t = Y_0 \cdot \exp(\lambda \cdot t)$ совпадающий с решением (12) непрерывной модели при A=0. В общем случае (T>0), прямая подстановка выражения $Y_t = Y_0 \cdot \exp(\lambda \cdot t)$ в уравнение (18) показывает, что это выражения не является решением уравнения (18) поскольку $\Delta_b^1 \exp(\lambda \cdot t) \neq \lambda \cdot \exp(\lambda \cdot t)$ (см. Таблицу 1). Аналогично подстановка выражения (12) в уравнение (20) показывает, что это выражения не является решением уравнения (20). В результате решение дискретной модели (21) не эквивалентно решению непрерывной модели (12).

В результате получаем, что скорость роста дискретной модели $\ln\,(1+\lambda)$ не совпадает со скоростью роста непрерывной модели $\lambda = s/v$. Совпадение решений дискретной и непрерывной модели возникает только в предельном случае $T \to 0$. В общем случае, модели описывают разное поведение экономики. Аналогичная ситуация возникает и для других макроэкономических моделей, включая модель естественного роста, модель Кейнса, динамическую межотраслевую модель Леонтьева и другие. Совпадение дискретных и непрерывных макроэкономических моделей может существовать только в предельном случае, при стремлении шага дискретизации к нулю, т.е. в пределе $T \to 0$. Решения непрерывных моделей в общем случае не будет решениями дискретных моделей, описываемых уравнениями со стандартными конечными разностями.

Используя пример модели Харрода-Домара, было показано, что макроэкономические модели с дискретным временем, описываемые уравнениями со стандартными конечными разностями, не могут считаться точными дискретными аналогами моделей с непрерывным временем. Уравнения дискретных и непрерывных макроэкономических моделей могут иметь разные решения и могут предсказывать разное поведение экономики. В следующем разделе мы предлагаем самосогласованное дискретное описание экономических акселераторов, позволяющее предлагать дискретные макроэкономические модели, которые можно рассматривать как точную дискретизацию соответствующих моделей с непрерывным временем. Кроме того, эти дискретные модели предсказывают такое же поведение экономики, как и соответствующие непрерывные макроэкономические модели.

5. Концепция точной дискретизации

Для того чтобы иметь конечно-разностные уравнения акселераторов, можно было рассматривать как точные дискретные аналоги уравнения (1), конечно-разностные операторы должны удовлетворять принципу соответствия [18]: конечные разности, которые являются точными дискретизациями производных целых порядков, должны подчиняться тем же характеристическим соотношениям, что и производные. Предлагаемый принцип алгебраического соответствия означает, что соответствие между дискретными и непрерывными экономическими моделями заключается не столько в предельном переходе, когда шаг дискретизации стремится к нулю ($T \to 0$), сколько в том, что математические операторы, используемые в этих двух моделях, должны подчиняться во многих случаях одним и тем же математическим правилам.

Точные дискретные аналоги производных должны обладать теми же характеристическими свойствами, что и производные [18]:

(1) Правило Лейбница (правило дифференцирования произведения функций) является основным характеристическим свойством производных целого порядка. В силу этого точные конечные разности, являющиеся точными дискретными аналогами производных, должны удовлетворять правилу Лейбница.

(2) Точные конечные разности, являющиеся точной дискретизацией производных, должны подчиняться полугрупповому свойству. В том числе, действие точных конечных разностей второго порядка должны быть эквивалентно действию двух конечных разностей первого порядка.

(3) Действие точных конечных разностей на степенные функции должно давать те же выражения, что и действие производных. Это позволяет рассматривать точное соответствие производных и точных конечных разностей на пространстве целых функций.

В работах [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23], был предложен подход к точной дискретизации, который базируется на новом типе конечных разностей. Предлагаемые конечные разности могут рассматриваться как точные дискретизации производных целого и нецелого порядков. Предлагаемые точные разностные операторы не зависят от формы и параметров рассматриваемых дифференциальных уравнений. Используя эти операторы, можно получать точные дискретные аналоги дифференциальных уравнений целого и дробного порядков [18].

Предлагаемый подход к точной дискретизации позволяет получить разностные уравнения, которые точно соответствуют дифференциальным уравнениям. При этом существует не только точное соответствие между уравнениями, но и точное соответствие между решениями этих уравнений. Точные конечные разности, предложенные в [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23], позволяют предложить точные дискретные аналогии для уравнений акселераторов с непрерывным временем.

6. Точные дискретные аналоги стандартного акселератора

Обозначим пространства целых функций, определенных на вещественной оси R и на поле целых чисел Z, через E(R) и E(Z), соответственно. Любая функция $X(t) \in E(R)$ может рассматриваться в виде степенного ряда

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot t^k, \qquad (22)$$

где коэффициенты x_k удовлетворяют условию $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} = 0$ и $t \in R$. Очевидно, что $X(n) \in E(Z)$ для $n \in Z$, если $X(t) \in E(R)$. Определим точную конечную разность Δ_T^k целого положительного порядка k на пространстве целых функций E(Z). Линейный оператор Δ_T^k будет называться точной конечной разностью порядка k>0, если выполняется следующее условие [18, 19]. Если $X(t), Y(t) \in E(R)$ и дифференциальное уравнение

$$\frac{d^k Y(t)}{dt^k} = \lambda \cdot X(t) \qquad (23)$$

выполняется для всех $t \in R$ то, тогда конечно-разностное уравнение

$$\Delta_T^k\, Y(n) = \lambda \cdot X(n) \qquad (24)$$

выполняется для всех $n \in Z$.

В статьях [17, 18, 19], точные конечные разности целого порядка были предложены в явном виде. Точная конечная разность первого порядка определяется уравнением

$$\Delta_T^1 X(t) \coloneqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cdot (X(t - T \cdot m) - X(t + T \cdot m)), \qquad (25)$$

где сумма подразумевает суммирование по Чезаро или по Пуассону-Абелю [18, с. 55-56].

Уравнение (23) при k=1 может интерпретироваться как стандартное уравнением акселератора для модели с непрерывным временем. Уравнение (24) с точной конечной разностью (25) можно рассматривать как точный дискретный аналог стандартного акселератора с непрерывным временем, который описывается уравнением (23) при k=1.

Точные конечные разности второго и последующих целых порядков могут определяться рекуррентной формулой

$$\Delta_T^{k+1}\, X(t) \coloneqq \Delta_T^1\big(\Delta_T^k\, X(t)\big). \qquad (26)$$

В результате точная конечная разность второго порядка имеет вид

$$\Delta_I^2\, X(t) \coloneqq -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^m}{m^2} \cdot \big(X(t - T \cdot m) + X(t + T \cdot m)\big) - \frac{\pi^2}{3} \cdot X(t). \qquad (27)$$

Для произвольных положительных целых значений n, точные конечные разности задаются уравнением

$$\Delta_T^n\, X(t) \coloneqq \sum_{m=1}^{\infty} M_n(m) \cdot (X(t - T \cdot m) + (-1)^n \cdot X(t + T \cdot m)) - M_n(0) \cdot X(t), \qquad (28)$$

где функция $M_n(m)$ определяется уравнением

$$M_n(m) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1} \frac{(-1)^{m+k} \cdot \Gamma(n+1) \cdot \pi^{n-2k-2}}{\Gamma(n-2k+1) \cdot m^{2k+2}} \cdot \left((n-2k) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \pi \cdot m \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) \qquad (29)$$

for $m \neq 0$, а для m=0 формулой

$$M_n(0) = \frac{\pi^n}{n+1} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right). \qquad (30)$$

Для отрицательных значений аргумента функции $\Gamma(n-2k+1)$ в формуле (29) предполагается использование $1/\Gamma(-z) = 0$ для положительных целых значений z.

Важным характеристически свойством точной конечной разности первого порядка является стандартное правило Лейбница

$$\Delta_T^1 \left(X(t) \cdot Y(t)\right) = \left(\Delta_T^1 X(t)\right) \cdot Y(t) + X(t) \cdot \left(\Delta_T^1 Y(t)\right), \qquad (31)$$

которое выполняется на пространстве целых функций [18], то есть для любых $X(t), Y(t) \in E(Z)$. Для точных конечных разностей целых порядков k>0 правило Лейбница имеет вид

$$\Delta_T^k \left(X(t) \cdot Y(t)\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \left(\Delta_T^{k-j} X(t)\right) \cdot \left(\Delta_T^j Y(t)\right), \qquad (32)$$

который является точным аналогом правила Лейбница для стандартных производных d^k/dt^k целого порядка k>0.

Для сравнения конечных разностей и производных в Таблице 2 приводится действие производных $df(t)/dt$, и точных конечных разностей $\Delta_T^1 f(t)$ на те же элементарные функции f(t), что и в Таблице 1.

Таблица 2. Действие производных и точных конечных разностей на элементарные функции

$f(t)$	$df(t)/dt$	$\Delta_T^1 f(t)$
$\exp(\lambda \cdot t)$	$\lambda \cdot \exp(\lambda \cdot t)$	$\lambda \cdot \exp(\lambda \cdot t)$
$\sin(\lambda \cdot t)$	$\lambda \cdot \cos(\lambda \cdot t)$	$\lambda \cdot \cos(\lambda \cdot t)$
$\cos(\lambda \cdot t)$	$-\lambda \cdot \sin(\lambda \cdot t)$	$-\lambda \cdot \sin(\lambda \cdot t)$
t^2	$2 \cdot t$	$2 \cdot t$
t^3	$3 \cdot t^2$	$3 \cdot t^2$

Отметим, что элементарные функции, которые рассматриваются в таблице, являются примерами целых функций. В работе [18] доказывается, что действие точных конечных разностей Δ_T^1 на пространстве целых функций совпадает с действием первой производной. В результате решения уравнений с точными разностями совпадают с решениями широкого класса дифференциальных уравнений [18]. Эквивалентность действий производных и точных конечных разностей приводит к эквивалентности широкого класса макроэкономических моделей с дискретным и непрерывным временем, если в дискретных моделях будут использоваться точные конечные разности. Продемонстрируем эквивалентность решений уравнений на примере непрерывных и дискретных моделей Харрода-Домара.

Точный дискретный аналог дифференциального уравнения стандартного акселератора (1) имеет вид

$$I(t) = v \cdot \left(\Delta_T^1 Y\right)(t). \qquad (33)$$

Используя явный вид точной конечной разности, уравнение (33) записывается в виде

$$I(t) = v \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \left(Y(t - T \cdot k) - Y(t + T \cdot k)\right). \qquad (34)$$

Используя уравнение Ньютона-Лейбница, уравнение (1) можно записать в интегральном виде

$$Y(t) = Y(0) + \frac{1}{v} \cdot \int_0^t I(\tau) d\tau. \qquad (35)$$

Дискретный аналог интегрального уравнения (35), которые соответствует уравнению (34), имеет вид

$$Y(t) = Y(0) + \frac{1}{v} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Si(\pi \cdot k)}{\pi} \cdot \left(I(t - T \cdot k) - I(t + T \cdot k)\right), \qquad (36)$$

где $Si(\pi \cdot k)$ – интегральный синус и $\Delta_T^1 Y(0) = 0$. В уравнении (36) мы использовали точную конечную разность Δ_T^{-1}, которая является точным дискретным аналогом интеграла [17, 18]. Для этой конечной разности минус первого порядка выполняются соотношения $(\Delta_T^1 \Delta_T^{-1} X)(t) = X(t)$ и $(\Delta_T^{k+1} \Delta_T^{-1} X)(t) = (\Delta_T^k X)(t)$ для любых $X(t) \in E(Z)$.

Дискретное уравнение, являющееся точным дискретным аналогом уравнения (9) модели Харрода-Домара с непрерывным временем, может быть записано в виде

$$\left(\Delta_T^1 Y\right)(t) = \lambda \cdot Y(t) - \frac{1}{v} \cdot A(t), \qquad (37)$$

где $\lambda = s/v$ и $s = 1 - c$ – предельная величина склонности к сбережению. Решение уравнения (37) при $A(t) = A = const$ имеет вид

$$Y(t) = A/s + (Y(0) - A/s) \cdot \exp(\lambda \cdot t). \qquad (38)$$

Тот факт, что функция (38) является решением конечно-разностного уравнения (37), можно проверить прямой подстановкой функции (38) в уравнение (37) и использования равенств $\Delta_T^1 \exp(\lambda \cdot t) = \lambda \cdot \exp(\lambda \cdot t)$, и $\Delta_T^1 (A/s) = 0$.

Решение (38) совпадает с решением (12) уравнения (9) модели Харрода-Домара с непрерывным временем. В результате можно утверждать, что дискретная модель Харрода-Домара, использующая точные конечные разности, эквивалентна непрерывной модели Харрода-Домара, основанной на дифференциальном уравнении.

Используя модель Харрода-Домара в качестве примера, было показано, что уравнения макроэкономических моделей с непрерывным временем и соответствующие им модели с дискретным временем, основанные на точных конечных разностях, имеют одинаковые решения. В результате эти дискретные и непрерывные макроэкономические модели описывают одно и то же поведение экономики.

7. Заключение

Предлагается новый подход к точной дискретизации макроэкономических моделей с непрерывным временем. Этот подход основан на точных конечных разностях, которые были предложены в работах [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. Предлагаемые конечные разности удовлетворяют принципу универсальности и принципа алгебраического соответствия [18]. Конечные разности обладают свойством универсальности, если они не зависят от параметров и от вида рассматриваемых дифференциальных уравнений. Алгебраическое соответствие означает, что точные конечные разности должны удовлетворять тем же алгебраическим отношениям, что и производные. Мы предложили самосогласованное дискретное описание акселератора, основанное на точных конечных разностях. Мы доказали, что уравнения макроэкономических моделей с непрерывным временем и соответствующие им модели с дискретным временем, использующие точные конечные разности, могут иметь одинаковые решения. Эти дискретные и непрерывные макроэкономические модели могут описывать одно и то же поведение экономики.

Следует отметить, что предлагаемый подход может быть использован и для макроэкономических моделей с динамической памятью [24, 25, 26]. Точные дробные разности, предложенные в работах [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23], позволяют получить точные дискретные аналоги уравнений с непрерывным временем для акселераторов и мультипликаторов со степенной памятью, определенных в [27]. Решения широкого класса уравнений с точными дробными разностями совпадают с решениями дробных дифференциальных уравнений [18]. Этот факт можно проверить подстановкой решения непрерывного уравнения в уравнение с точными дробными разностями. Широкий класс дискретных моделей, использующих точные дробные разности нецелых порядков, будет эквивалентен непрерывным макроэкономическим моделям с динамической памятью [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38], использующим дробные дифференциальные уравнения. В силу этого дискретные и непрерывные макроэкономические модели будут предсказывать одинаковое поведение экономических процессов с памятью.

Список литературы

1. *Аллен Р.* Математическая экономия. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. 670 с.
2. *Allen R.G.D.* Mathematical Economics. Second edition. London: Macmillan, 1960. 812 p. DOI 10.1007/978-1-349-81547-0.
3. Allen R.G.D. Macro-Economic Theory. A Mathematical Treatment. London: Palgrave Macmillan, 1967. 420 p. ISBN: 978-1-349-81543-2 DOI: 10.1007/978-1-349-81541-8.
4. *Domar E.D.* Capital expansion, rate of growth and employment // Econometrica. 1946. Vol. 14. № 2. P. 137-147. DOI: 10.2307/1905364.
5. *Domar E.D.* Expansion and employment // The American Economic Review. 1947. Vol. 37. № 1. P. 34-55.
6. *Harrod R.* An essay in dynamic theory // Economic Journal. 1939. Vol. 49 (193). P. 14-33. DOI: 10.2307/1905364.
7. *Харрод Р.Ф.* К теории экономической динамики. М.: Гелиос АРВ, 2011. 160 с.
8. *Харрод Р.Ф.* Теория экономической динамики. Пер. с англ. М.: ЦЭМИ РАН, 2008. 210 с.
9. *Potts R.B.* Differential and difference equations // American Mathematical Monthly, 1982. Vol. 89. № 6. P. 402-407.
10. *Potts R.B.* Ordinary and partial difference equations // Journal of the Australian Mathematical Society B., 1986. Vol. 27. № 6. P. 488-501.
11. *Mickens R.E.* Difference equation models of differential equations // Mathematical and Computer Modelling. 1988. Vol. 11. P. 528-530.
12. *Mickens R.E.* Discretizations of nonlinear differential equations using explicit nonstandard methods // Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999. Vol. 110. № 1. P. 181-185.
13. *Mickens R.E.* Nonstandard finite difference schemes for differential equations // Journal of Difference Equations and Applications, 2002. Vol. 8. № 9. P. 823-847. DOI: 10.1080/1023619021000000807.
14. *Mickens R.E.* Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1993. 264 p.

15. Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes. Edited by R.E. Mickens. Singapore: World Scientific, 2000. 264 p. ISBN: 978-981-02-4133-9.
16. Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes. Edited by R.E. Mickens. Singapore: World Scientific, 2005. 664 p.
17. *Tarasov V.E.* Exact discrete analogs of derivatives of integer orders: Differences as infinite series // Journal of Mathematics, 2015. Vol. 2015. Article ID 134842. 8 p. DOI: 10.1155/2015/134842.
18. *Tarasov V.E.* Exact discretization by Fourier transforms // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016. Vol. 37. P. 31-61. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.01.006.
19. *Тарасов В.Е.* Точные конечные разности: краткий обзор // Альманах современной науки и образования, 2016. № 7 (109). С. 105-108. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.gramota.net/materials/1/2016/7/27.html/ (дата обращения: 18.07.2017).
20. *Tarasov V.E.* Lattice fractional calculus // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 257. P. 12-33. DOI: 10.1016/j.amc.2014.11.033.
21. *Tarasov V.E.* Toward lattice fractional vector calculus // Journal of Physics A., 2014. Vol. 47. № 35. Artilce ID 355204. 51 p. DOI: 10.1088/1751-8113/47/35/355204.
22. *Tarasov V.E.* United lattice fractional integro-differentiation // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2016. Vol. 19. No. 3. P. 625-664. DOI: 10.1515/fca-2016-0034.
23. *Tarasov V.E.* Exact discretization of fractional Laplacian // Computers and Mathematics with Applications, 2017. Vol. 73. № 5. P. 855–863. DOI: 10.1016/j.camwa.2017.01.012.
24. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Concept of dynamic memory in economics // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. Vol. 55. P. 127-145. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.06.032.
25. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Понятие динамической памяти в экономической теории // Экономика и предпринимательство, 2017. № 6 (83). С. 868-880.
26. *Tarasov V.E., Tarasova V.V.* Long and short memory in economics: fractional-order difference and differentiation // IRA-International Journal of Management and Social Sciences. 2016. Vol. 5. No. 2. P. 327-334. DOI: 10.21013/jmss.v5.n2.p10.
27. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Обобщение понятий акселератора и мультипликатора для учета эффектов памяти в макроэкономике // Экономика и предпринимательство, 2016. № 10-3 (75-3). С. 1121-1129.
28. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Dynamic intersectoral models with power-law memory // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. Vol. 54. P. 100-117. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.05.015.
29. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Economic growth model with constant pace and dynamic memory // Проблемы современной науки и образования. 2017. № 2 (84). P. 40-45. DOI: 10.20861/2304-2338-2017-84-001.
30. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Fractional dynamics of natural growth and memory effect in economics // European Research, 2016. № 12 (23). P. 30-37. DOI: 10.20861/2410-2873-2016-23-004.
31. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Экономическая модель естественного роста с динамической памятью // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, 2017. № 4-2. С. 51-58.
32. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Макроэкономические модели с динамической памятью // Экономика и предпринимательство, 2017. № 3-2 (80-2). С. 26-35.
33. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Эредитарное обобщение модели Харрода-Домара и эффекты памяти // Экономика и предпринимательство, 2016. № 10-2 (75-2). С. 72-78.
34. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Эффекты памяти в эредитарной модели Харрода—Домара // Проблемы современной науки и образования, 2016. № 32 (74). С. 38-44. DOI: 10.20861/2304-2338-2016-74-002.
35. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Кейнсианская модель экономического роста с памятью // Экономика и управление: проблемы, решения, 2016. № 10-2 (58). С. 21-29.
36. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Эффекты памяти в эредитарной модели Кейнса // Проблемы современной науки и образования, 2016. № 38 (80). С. 56-61. DOI: 10.20861/2304-2338-2016-80-001.
37. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Динамические межотраслевые модели с памятью, обобщающие модель Леонтьева // Экономика и предпринимательство, 2017. № 2-1 (79-1). С. 913-924.
38. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Хронологическая экспонента для процессов с памятью и динамические межотраслевые модели экономики // Наука и образование сегодня, 2017. № 4 (15). С. 29-39.