ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛЫ КАРДАНО

Садуллаева М.З.[1], Сунатова Д.А.[2], Самигова Н.Х.[3]

[1]Садуллаева Мавжуда Зиядуллаевна – преподаватель;
[2]Сунатова Дилфуза Абатовона - старший преподаватель;
[3]Самигова Нодира Хамиуллаевна - старший преподаватель,
кафедра физики, математики и информационных технологий, факультет промышленной фармации,
Ташкентский фармацевтический институт,
г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *статья посвящена изучению методов решения кубических уравнений. Особое внимание уделяется формуле Кардано. В статье приведен подробный алгоритм решения уравнений третьей степени с использованием данного метода, а также его реализация в объектно-ориентированной среде* Delphi.
Ключевые слова: *уравнение, алгоритм, корень.*

Введение

Уже в древности люди осознали, как важно научиться решать алгебраические уравнения вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ – ведь к ним сводятся очень многие вопросы естествознания. Также проводились исследования по получению формул для решения уравнений любой степени *n*, при помощи которых можно выразить корни уравнения через его коэффициенты, т.е., решить уравнение в радикалах. Однако только в XVI веке итальянским математикам удалось сформулировать алгоритм решения уравнений третьей и четвертой степеней.

Целью исследования является изучение существующих методов, а также разработка алгоритма и создание на его основе программного обеспечения для решения кубических уравнений на основе формулы Кардано.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть различные методы решения уравнений третьей степени.
2. Изучить особенности применения формулы Кардано для решения кубических уравнений.
3. Создать программное обеспечение для решения кубических уравнений.

Методы решения кубических уравнений

В области комплексных чисел, согласно основной теореме алгебры, кубическое уравнение всегда имеет 3 корня (с учётом кратности). Так как каждый вещественный многочлен нечётной степени имеет хотя бы один вещественный корень, все возможные случаи состава корней кубического уравнения исчерпывается тремя, которые легко различаются с помощью дискриминанта $\Delta = -4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 + 18abcd - 27a^2d^2$ [2]:

Корни кубического уравнения x_1, x_2, x_3 связаны с коэффициентами a, b, c, d следующим образом:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a} \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}$$

Исходя из основных свойств решения кубических уравнений, необходимо дать определение понятию «комплексное число». Комплексные числа — числа вида x + y, где x и y – вещественные числа, i – мнимая единица, то есть: $i^2 = -1$. Числа x = □(z) (или Re z) и y = □(z) (или Im z) называются соответственно вещественной и мнимой частями z. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Если комплексное число z = x + iy, то число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряжённым к z [1].

Наиболее распространенный метод решения кубических уравнений – ***метод перебора*** [2]. Сначала путём перебора находится один из корней уравнения (например, x_1). Вторая стадия решения – это деление многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$ на двучлен $x - x_1$ и решение полученного квадратного уравнения.

Алгоритм решения кубических уравнений с использованием формулы Кардано

В данном разделе статьи приведен подробный алгоритм решения уравнений третьей степени с помощи формулы Кардано. Данный алгоритм состоит из двух этапов. *На первом этапе* кубические уравнения приводятся к форме, в которой отсутствует член со второй степенью неизвестного. Такие кубические уравнения называют трёхчленными кубическими уравнениями. *На втором* *этапе* трёхчленные кубические уравнения решаются при помощи сведения их к квадратным уравнениям [3].

Рассмотрим алгоритм нахождения всех корней кубического уравнения $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, A \neq 0$ на основе описанной выше формулы, а также ее тригонометрической интерпретации [3, 4]. Приведем исходное уравнение к каноническому виду. Для этого сделаем замену переменного по формуле $x = y - \frac{B}{3A}$: $\left(y - \frac{B}{3A}\right)^3 + \frac{B}{A}\cdot\left(y - \frac{B}{3A}\right)^2 + \frac{C}{A}\cdot\left(y - \frac{B}{3A}\right) + \frac{D}{A} = 0$. Раскрыв скобки в левой части уравнения, получим: $y^3 + \frac{3AC - B^2}{3A^2} + \frac{2B^2 - 9ABC + 27A^2D}{27A^3} = 0$.

Дискриминантом уравнения $y^3 + p\cdot y + q = 0$ называется число $S = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Найдем решение полученного уравнения в виде:

$$y = \sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m-n}$$

$$\left(\sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m-n}\right)^3 + p\cdot\left(\sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m-n}\right) + q = 0$$

$$3\cdot\left(\sqrt[3]{m+n}\cdot\sqrt[3]{m-n} + \frac{p}{3}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m-n}\right) + (2\cdot m + q) = 0$$

Число $y = \sqrt[3]{m+n} + \sqrt[3]{m-n}$ удовлетворяет этому равенству, если числа m и n удовлетворяют системе из двух уравнений:

$$2\cdot m + q = 0 \qquad \sqrt[3]{m+n}\cdot\sqrt[3]{m-n} + \frac{p}{3} = 0$$

Находим числа m и n: $m = \frac{-q}{2} \quad m^2 - n^2 = \frac{-p^3}{27} \quad n^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

Дальнейшее решение зависит от знака дискриминанта S.

1. ***Пусть дискриминант меньше нуля.*** Тогда уравнение имеет три различных корня.

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + i\cdot\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - i\cdot\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2} + i\cdot\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}\cdot\sqrt[3]{\frac{-q}{2} - i\cdot\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}} = \frac{-p}{3}$$

Найдём модуль комплексных чисел $\frac{-q}{2} \pm i\cdot\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$:

$$R = \sqrt{\left(\frac{-q}{2}\right)^2 + \left[\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]^2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} = \sqrt{\frac{-p^3}{27}}$$

Аргумент числа $\frac{-q}{2} + i\cdot\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$ равен (в зависимости от знака q):

Итак, если дискриминант меньше нуля, то уравнение имеет три различных действительных корня:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{F}{3}\right) \quad y_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{F}{3}+\frac{2\pi}{3}\right) \quad y_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{F}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

2. ***Пусть дискриминант больше нуля.*** Тогда уравнение имеет один действительный корень и два комплексно-сопряжённых.

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

При этом для любых комплексных значений корней необходимо выполнение условия: $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \frac{-p}{3}$.

Примем аргумент *F* действительных чисел, стоящих под знаком кубического корня, равным нулю. При этом модули этих чисел могут принимать отрицательное значение. Аргумент кубического корня будет принимать 3 значения: *0, 2*π/3, 4*π/3.* Каждое решение $y=y_1$, $y=y_2$, $y=y_3$ будет состоять из суммы двух комплексных чисел $y = z_1 + z_2$.

Для действительных значений кубических корней выполняется обозначенное выше условие. Поэтому действительный корень уравнения $y_1 = z_{11} + z_{21}$. Учитывая равенство $\left(\frac{-1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$, получим два комплексно сопряжённых корня: $y_2 = z_{12} + z_{23}$, $y_3 = z_{13} + z_{22}$.

Итак, если дискриминант больше нуля, то уравнение имеет один действительный корень и два комплексно-сопряжённых корня:

3. ***Дискриминант равен нулю.*** В этом случае уравнение имеет три действительных корня, и два корня из трёх обязательно совпадают друг с другом. Рассуждая точно так же, как в случае с положительным дискриминантом, учитывая равенство $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = 0$, из формул корней уравнения с положительным дискриминантом получим:

$$y1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}} \quad y2 = \frac{-1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\right) + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\right)$$

$$y3 = \frac{-1}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\right) - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\right)$$

Итак, если дискриминант равен нулю, то уравнение имеет три действительных корня, и два корня из трёх обязательно совпадают друг с другом: $y_1 = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}, y_2 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}, y_3 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$.

Теперь получим решение исходного кубического уравнения $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, A \neq 0$.Дискриминант этого уравнения равен:

$$S = \frac{4\cdot(3AC - B^2)^3 + (2B^2 - 9ABC + 27A^2D)^2}{2916A^6}$$

$$x1 = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - \frac{B}{3\cdot A} \qquad x2 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - \frac{B}{3\cdot A} \qquad x3 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - \frac{B}{3\cdot A}$$

При этом: $p = \dfrac{3AC - B^2}{3A^2} \quad q = \dfrac{2B^2 - 9ABC + 27A^2 D}{27A^3} \quad S = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$.

Заключение

Существует довольно много проблем в различных научных областях, решение которых сводится к изучению методов решения уравнений третьей и выше степеней. Таким образом, можно сделать вывод, что актуальность проведенного исследования заключается в практическом применении рассмотренных методов, а также созданного программного обеспечения как при изучении некоторых тем математики, физики в школе и ВУЗах, так и при решении прикладных задач из различных областей.

Список литературы

1. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: Наука, 2006.
2. *Омельченко В.П., Курбатова Э.В.* Математика: учебное пособие. Ростов н/Д.: Феникс, 2005.
3. *Пичурин Л.Ф.* За страницами учебника алгебры. М.: Просвещение, 2010. Справочное пособие. М.