ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕВЫШЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Усов А.Е.[1], Варламов А.А.[2], Бабкин О.В.[3], Дос Е.В.[4], Мостовщиков Д.Н.[5]

[1]Усов Алексей Евгеньевич – ведущий архитектор;
[2]Варламов Александр Александрович – старший архитектор;
[3]Бабкин Олег Вячеславович – старший архитектор;
[4]Дос Евгений Владимирович – архитектор;
[5]Мостовщиков Дмитрий Николаевич – старший архитектор,
Системный интегратор «Li9 Technology Solutions»,
г. Райли, Соединенные Штаты Америки

Аннотация: *рассмотрены базовые алгоритмы использования оператора упорядоченного взвешенного среднего при многокритериальном принятии решений. На основе данных алгоритмов построена математическая модель, которая обобщает особенности применения математического инструментария в данной области. Показано, что оператор упорядоченного взвешенного среднего обладает свойствами ограниченности, монотонности, симметрии и идемпотентности, а значит, на его основе можно реализовать широкий набор различных типов группирования элементов в зависимости от выбора вектора весовых коэффициентов. Отмечено, что при моделировании реальных задач зачастую возникает необходимость удовлетворение критериев для набора решений при некотором уровнем неопределенности, которая выражается через распределение вероятностей. Построена математическая модель, которая базируется на функции распределения вероятности и функции определении интервалов выполнения критериев. Предложен метод упорядочивания вероятностное распределения в рамках интервалов критерия принятия решения при помощи алгоритмов стохастического доминирования*

Ключевые слова: *распределение вероятностей, упорядоченное взвешенное среднее, метод вероятности превышения, весовые коэффициенты, совокупное распределение вероятности, стохастическое доминирование.*

УДК 331.225.3

Введение

Поиск эффективных алгоритмов многокритериального принятия решений на сегодняшний день является одной из наиболее ***актуальных*** задач в области работы с нечеткими множествами. При этом высокую продуктивность показывают методы, которые базируются на использовании оператора упорядоченного взвешенного среднего [1-5]. Тем не менее, большое количество исследований в этой области игнорируют проблему стандартизации представления наборов критериев принятия решений в виде вероятностного распределения с последующим ранжированием, что выделяется как ***нерешенная часть*** вопроса в рамках общего исследования.

Анализ последних исследований и публикаций в данной области показал приоритет использования оператора упорядоченного взвешенного среднего при построении алгоритмов многокритериального принятия решений [1-5]. Были рассмотрены методы, которые базируются на функции распределения вероятности и функции определении интервалов выполнения критериев, данный подход показал свою эффективность при работе с критериями, характеризующимися некотором уровнем неопределенности [6-10]. Также в рамках данной работы был проведен анализ эффективности упорядочивания вероятностного распределения в рамках интервалов критерия принятия решения при помощи алгоритмов стохастического доминирования [11-15].

Целью работы, таким образом, стала разработка методологии построения алгоритмов ранжирования решений при помощи оператора упорядоченного взвешенного среднего и анализа критериев принятия решений, представленных в виде вероятностных распределений.

1. Применение оператора упорядоченного взвешенного среднего при многокритериальном принятии решений

На сегодняшний день при многокритериальном принятии решений (MCD: Multi-Criteria Decision) широко применяется оператор упорядоченного взвешенного среднего (OWA: Ordered Weighted Averaging). Для представления данного метода в математической форме (рис. 1) следует ввести следующий базовый набор обозначений [1, 2]:

- набор решений $x \in [X_1; X_N]$;
- набор критериев $c \in [C_1; C_K]$, как функций, которые определяют уровень соответствия решения $C_j(X_i)$ установленном критерию;

- процедура принятия решений как функция $M\big(C_1(x) \dots C_K(x)\big)$, в качестве которой может быть использован OWA-оператор $A_{OW}\big(C_1(x) \dots C_K(x)\big)$;
- набор весовых коэффициентов $w \in [W_1; W_K]$, с которыми ассоциируется OWA-оператор;
- индексная функция $\rho(j)$.

Далее построение математической модели подразумевает введение ограничений на набор значений, которые могут принимать указанные функции [3-5]:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} W_j \in [0;1] \\ \sum\limits_j W_j = 1 \\ A_{OW}(a_1, \dots, a_K) = \sum\limits_j W_j \cdot b_j \end{array}\right. \\ A_{OW}(a_1, \dots, a_K) = \sum\limits_{j=1}^{K} W_j \cdot a_{\rho(j)} \\ \qquad C_j \in [0;1] \end{array}\right. , \qquad (1)$$

где

$$a_i = C_i(x). \qquad (2)$$

Ключевым моментом является то, что OWA-оператор производит упорядочение аргументов в порядке убывания их значений. Таким образом, аргумент a_i оказывается связан не с конкретным весом W_i, а зависит от заданного порядка. Этот шаг вносит нелинейность в процесс группирования элементов набора данных.

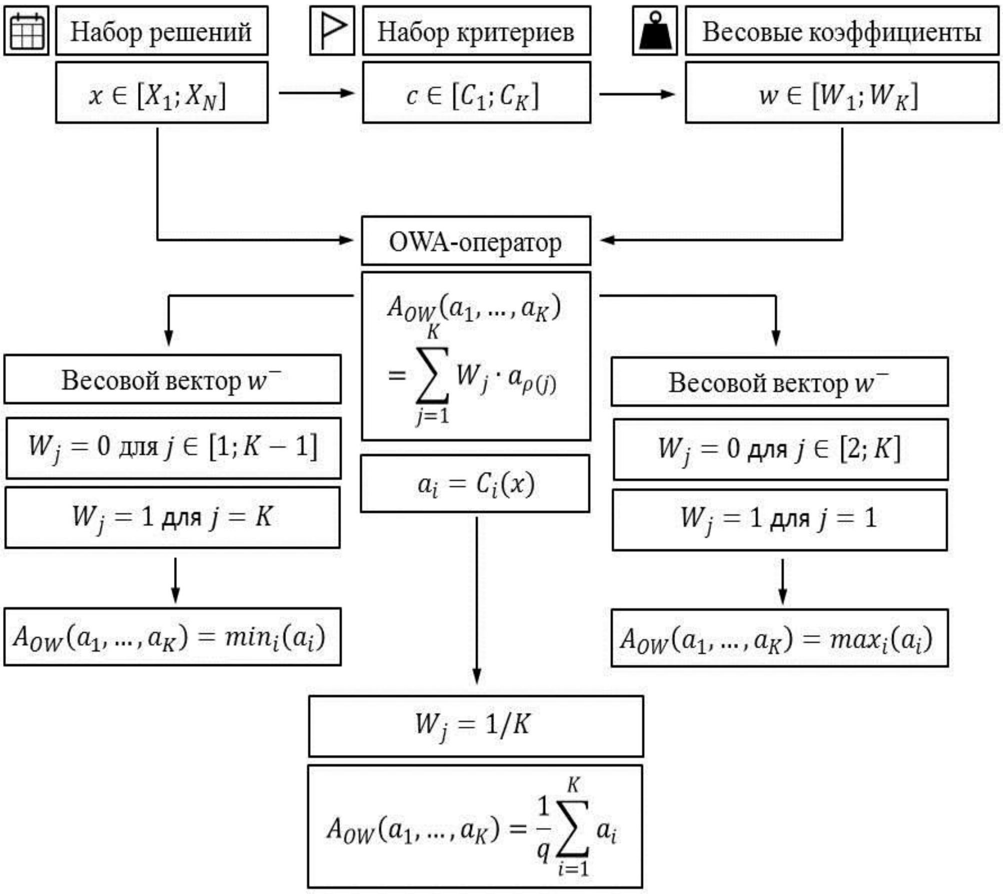

Рис. 1. Базовая схема применения оператора упорядоченного взвешенного среднего при многокритериальном принятии решений.

Соответственно OWA-оператор обладает свойствами ограниченности, монотонности, симметрии и идемпотентности, а значит, на его основе можно реализовать широкий набор различных типов группирования элементов в зависимости от выбора вектора весовых коэффициентов.

Для иллюстрации данного подхода рассмотрим два крайних случая:

- если для весового вектора w^- справедливо $W_j = 0$ для $j \in [1; K-1]$ и $W_j = 1$ для $j = K$, то $A_{OW}(a_1, \dots, a_K) = min_i(a_i)$;
- если для весового вектора w^+ справедливо $W_j = 0$ для $j \in [2; K]$ и $W_j = 1$ для $j = 1$, то $A_{OW}(a_1, \dots, a_K) = max_i(a_i)$.

Для частного случая, который можно назвать вырожденным, при котором весовой вектор для $W_j = 1/K$ дает простое решение для OWA-оператора:

$$A_{OW}(a_1, \dots, a_K) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{K} a_i \qquad (3)$$

В рамках многокритериального принятия решений выбор весового вектора является результатом взаимосвязи между критериями. Так, например, вектор w^-, где OWA-группирование представляет $A_{OW}(a_1, \dots, a_K) = min_i(a_i)$, может быть рассмотрено как то условие математического моделирования, при котором выполняются полный набор условий $[C_1; C_K]$. С другой стороны при $W_j = 1/K$ удовлетворяется часть критериев.

2. Применение вероятностного подхода при многокритериальном принятии решений

Следует отметить, что при моделировании реальных задач зачастую может возникнуть необходимость удовлетворение критериев для набора решений $x \in [X_1; X_N]$ в условиях, которые характеризуются некоторым уровнем неопределенности, которая выражается через распределение вероятностей [5-10].

В этом случае к набору критериев $c \in [C_1; C_K]$ и набору весовых коэффициентов $w \in [W_1; W_K]$ следует добавить набор значений, определяющих интервалы, в рамках которых определяются набор решений $x \in [X_1; X_N]$ — $y \in [Y_1; Y_M]$. При этом элементы данного набора должны ранжироваться по следующему принципу:

$$Y_J > Y_{J+1} \text{ для } \forall\, Y_J. \tag{4}$$

Таким образом набор y отражает уровень соответствия отдельного решения выбранному критерию.

Далее следует ввести функцию распределения вероятности $p_k \in [P_{k,1}; P_{k,N}]$ соответствия $x \in [X_1; X_N]$ критерию $C_k(x)$ в пространстве, определяющем интервалы $y \in [Y_1; Y_M]$. При этом для любого $C_k(x)$ через систему уравнений можно ввести ограничения:

$$\begin{cases} P_{k,1} \in [0;1] \\ \sum_{j=1}^{N} P_{k,j} = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Чтобы использовать ранжирование в соответствии с OWA-оператором для набора $C_k(x)$ нужно ввести правила для ранжирования соответствующего набора. Поскольку в данном случае это соответствует распределению вероятностей, определение порядка является нетривиальной задачей. Пусть есть некая функция L определяющая порядок по удовлетворению набора критериев x. В таком случае $L(i)$ определяет критерий лучшего соответствия решению x, а $p(L(i))$ вероятность распределения для данного критерия.

Функция L позволяет рассчитать совокупное распределение вероятности (aggregated probability distribution):

$$p = \sum_{i=1}^{K} w_i \cdot p(L(i)). \tag{6}$$

При этом $p()$ следует рассматривать как функцию, каждая из компонент которой определяется как:

$$P_j = \sum_{i=1}^{K} w_i \cdot P_j\big(L(i)\big). \qquad (7)$$

В таком случае набор $P: \{P_1, \dots P_j, \dots P_N\}$ может быть представлен и рассчитан как:

$$P: \left\{ \sum_{i=1}^{K} w_i \cdot P_1\big(L(i)\big), \dots \sum_{i=1}^{K} w_i \cdot P_j\big(L(i)\big), \dots \sum_{i=1}^{K} w_i \cdot P_N\big(L(i)\big) \right\}, \qquad (8)$$

где каждое P_j соответствует удовлетворению условия в интервале Y_j.

Уравнения (7) и (8) демонстрируют, что определение совокупного распределение вероятности в наибольшей степени зависят от набора весовых коэффициентов $w \in [W_1; W_K]$, таким образом, анализ эффективности примене-ния данного подхода подразумевает моделирование случаев с различными значениями w.

Аналогично исследованию проведенного в предыдущем разделе для совокупного распределение вероятности следует рассмотреть случай, когда $W_i = 0$ для $i \in [2; K]$ и $W_i = 1$ для $i = 1$, а также случай, при котором $W_i = 0$ для $i \in [1; K-1]$ и $W_i = 1$ для $i = K$. В первом случае мы получаем максимальное соответствие критерию в рамках интервала Y_j, а во втором — минимальное (т.е., это вероятность распределения критерия, который удовлетворен в наименьшей степени).

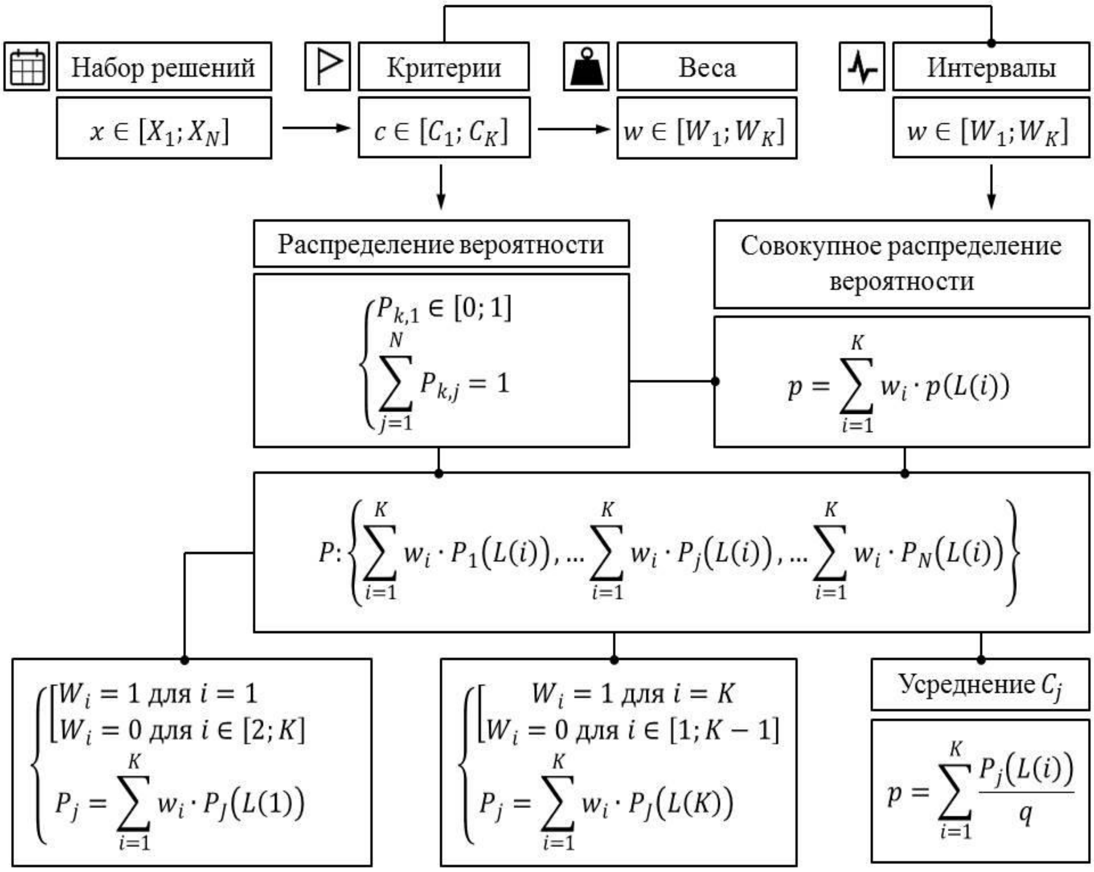

Рис. 2. Схема применение вероятностного подхода при многокритериальном принятии решений

Соответственно, в математическом виде эту модель можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \begin{cases} W_i = 1 \text{ для } i = 1 \\ W_i = 0 \text{ для } i \in [2;K] \end{cases} \\ P_j = \sum_{i=1}^{K} w_i \cdot P_j(L(1)) \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{cases} W_i = 1 \text{ для } i = K \\ W_i = 0 \text{ для } i \in [1;K-1] \end{cases} \\ P_j = \sum_{i=1}^{K} w_i \cdot P_j(L(K)) \end{cases} \end{array}\right. \tag{9}$$

При этом случай для которого $W_j = 1/K$, опять-таки можно назвать вырожденным. Соответственно, совокупное распределение вероятности для этого случая определяется как:

$$p = \sum_{i=1}^{K} \frac{P_j(L(i))}{q}, \tag{10}$$

и, значит, в ранжировании критериев, опять-таки, нет необходимости.

3. Применение стохастического подхода при многокритериальном принятии решений

В предыдущих разделах было рассмотрено, как упорядочить критерии принятия решения $C_k(x)$ в соответствии с функцией L, но в то же время для критериев были введены интервалы y внутри которых вероятностное распределение также должно быть упорядочено [11-14]. С этой целью в рамках данной работы было предложено использовать метод стохастического доминирования (stochastic dominance).

Пусть для каждого $C_k(x)$ мы имеем вероятностное распределение P_k и, таким образом, можем получить набор векторов T_k:

$$\begin{cases} T_k : \{T_k(1), \dots T_k(j), \dots T_k(N),\} \\ T_k(j) = \sum_{r=1}^{j} P_{k,r} \end{cases} . \quad (11)$$

Далее следует использовать функцию $Prob()$, которая для заданного интервала возвращает сумму соответствующих вероятностей. Поскольку $Y_j > Y_{j+1}$ можно переопределить T_k следующим образом:

$$T_k(j) = Prob\left(C_k(x) \geq Y_j\right), \quad (12)$$

таким образом, через $T_k(j)$ определяется вероятность того, что x удовлетворяет критерий $C_k(x)$, по крайней мере, для Y_j. Для заданных P_k, $C_k(x)$ и $T_k(j)$, соответственно, может быть определена функция распределения превышения вероятности (EDF: Exceedance Distribution Function) как E_k для T_k и $E_k(j)$ для $T_k(j)$, соответственно [15]. Причем для каждого критерия принятия решения C_k можно определить функцию $T_k(j)$, где $j \in [1;N]$, для которой должны быть введены следующие ограничения:

$$\begin{cases} T_k(1) = P_{k,1} \\ T_k(N) = 1 \\ T_k(j+1) \geq T_k(1) \end{cases} \quad (13)$$

На уровне данного подхода можно определить, что $C_{k1}(x)$ стохастически доминирует над $C_{k2}(x)$ если $T_{k1} \geq T_{k2}$ для $j \in [1;N]$ и как минимум для одного j справедливо $T_{k1} > T_{k2}$. Аналогично можно сказать, что $C_{k1}(x)$ стохастически доминирует над $C_{k2}(x)$, если для любого Y_j критерий $C_{k1}(x)$обеспечивает большую вероятность чем $C_{k2}(x)$.

Разработанный математический аппарат может быть положен в основу построения комплексных алгоритмов ранжирования решений на основе OWA-оператора, который включает в себя анализ условий, представленных в виде вероятностных распределений.

Выводы

В результате проведенного анализа была разработана методология построения алгоритмов ранжирования решений при помощи оператора упорядоченного взвешенного среднего, анализа критериев принятия решений, представленных в виде вероятностных распределений и стохастического подхода. В частности построены:

- схема применения оператора упорядоченного взвешенного среднего при многокритериальном принятии решений;
- схема применение вероятностного подхода при многокритериальном принятии решений;

Разработанная методология многокритериального принятия решений благодаря включению вероятностного распределения и метода стохастического доминирования может быть использована для решения широкого класса задач на уровне выбора схем построения алгоритмов.

Список литературы

1. *Zarghami, M., & Szidarovszky, F.* (2008). New Approach In Obtaining Owa Weights For Multi Criteria Decision Making. Computational Intelligence in Decision and Control. doi:10.1142/9789812799470_0082.
2. *Yager, R. R.* (2017). OWA aggregation of multi-criteria with mixed uncertain satisfactions. Information Sciences, 417, 88-95. doi:10.1016/j.ins.2017.06.037.
3. *Kahraman, C.* (2008). Multi-Criteria Decision Making Methods and Fuzzy Sets. Springer Optimization and Its Applications Fuzzy Multi-Criteria Decision Making, 1-18. doi:10.1007/978-0-387-76813-7_1
4. *Triantaphyllou, E.* (2000). Multi-Criteria Decision Making Methods. Applied Optimization Multi-criteria Decision Making Methods: A Comparative Study, *5-21.* doi:10.1007/978-1-4757-3157-6_2
5. *Yager, R.* (2007). Fuzzy Methods for Constructing Multi-Criteria Decision Functions. 2007 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Multi-Criteria Decision-Making. doi:10.1109/mcdm.2007.369440
6. *Krishankumar, R., Saranya, R., Nethra, R., Ravichandran, K., & Kar, S.* (2019). A decision-making framework under probabilistic linguistic term set for multi-criteria group decision-making problem. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 1-13. doi:10.3233/jifs-181633
7. *Aggarwal, M.* (2017). Learning of aggregation models in multi criteria decision making. Knowledge-Based Systems, 119, 1-9. doi:10.1016/j.knosys.2016.09.031
8. *Aggarwal, M.* (2017). Adaptive linguistic weighted aggregation operators for multi-criteria decision making. Applied Soft Computing, *58,* 690-699. doi:10.1016/j.asoc.2017.04.063
9. *Fakhfakh, N., Verjus, H., & Pourraz, F.* (2011). Multi-criteria Decision Making Method for Quality of Service Aggregation. 2011 IEEE 15th International Enterprise Distributed Object Computing Conference. doi:10.1109/edoc.2011.10
10. *Aggarwal, M.* (2017). Discriminative aggregation operators for multi criteria decision making. Applied Soft Computing, 52, 1058-1069. doi:10.1016/j.asoc.2016.09.025
11. *Yager, R. R. and Alajlan N.,* Probability weighted means as surrogates for stochastic dominance in decision making, Knowledge-Based Systems 66, pp. 92–98, 2014.
12. *Jiang, G., Fan, Z., & Liu, Y.* (2018). Stochastic Multiple-Attribute Decision Making Method Based on Stochastic Dominance and Almost Stochastic Dominance Rules with an Application to Online Purchase Decisions. Cognitive Computation, 11(1), 87-100. doi:10.1007/s12559-018-9605-6
13. Section C: Stochastic Dominance. (2016). Problems in Portfolio Theory and the Fundamentals of Financial Decision Making, 79-101. doi:10.1142/9789814759359_0004
14. *Wang, L.* (2016). Research on Multiple-Objectives Stochastic Dominance for Multiple Attribute Decision Making. Proceedings of the 3d International Conference on Applied Social Science Research. doi:10.2991/icassr-15.2016.278
15. Weik, M., Computer Science and Communications Dictionary. Heidelberg: Springer, 2001.