КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Гатауллина Е.В.[1], Беляева М.Б.[2]

[1]Гатауллина Екатерина Владимировна – студент,
[2]Беляева Марина Борисовна - кандидат физико-математических наук, доцент,
Башкирский государственный университет,
г. Стерлитамак

Аннотация: *в данной статье рассмотрена классификация математических моделей.*
Ключевые слова: *математическая модель, оператор, исследование.*

Математическая модель - это представление математической реальности, одна из вариаций модели как системы, изучение которой позволяет получать информацию о другой системе.

В настоящее время существует огромное количество моделей различных типов, которые были разработаны в результате использования методов математического моделирования в различных видах деятельности. Исходя из этого, существует необходимость разделить существующие и появляющиеся математические модели на классификации. Классификация математических моделей осуществляется в зависимости от:

- сложности объекта исследования;
- оператора модели;
- входных и выходных параметров;
- методов модельного исследования;
- объектов исследования;
- порядка расчета.

В зависимости от сложности объекта исследования модели делятся на простые и сложные объекты-системы (рис. 1). В простых моделях не учитывается внутренняя структура объекта и также не учитываются его составные элементы и подпроцессы. Объект-система - это набор взаимосвязанных элементов, которые взаимодействуют с окружающей средой внутри объекта. В зависимости от сложности объекта исследования модели делятся на простые и исследовательские объекты-системы. В простых моделях не учитывается внутренний дизайн объекта, а также составляющие его элементы и подпроцессы. Объектная система - это набор взаимосвязанных элементов, которые взаимодействуют с окружающей средой как единое целое.

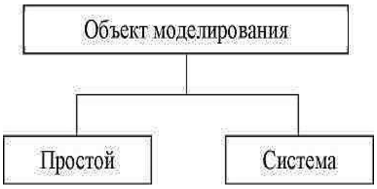

Рис. 1. Классификация математических моделей по сложности объекта.

Модели делятся на линейные, нелинейные, а также алгоритмические, простые и сложные модели в зависимости от оператора (рис. 2).

При линейной зависимости выходных параметров математическая модель становится линейной или линейной соответственно. В случае нелинейной зависимости модель называется нелинейной. Если оператор модели предоставляет функциональную зависимость выходных параметров от входных параметров в виде алгебраического выражения, модель называется простой. Модель, включающая дифференциальные и интегральные системы соотношений, называется сложной. В случае создания модели симулятора поведения объекта с использованием алгоритма, называется оператором модели. При этом сама модель является алгоритмической.

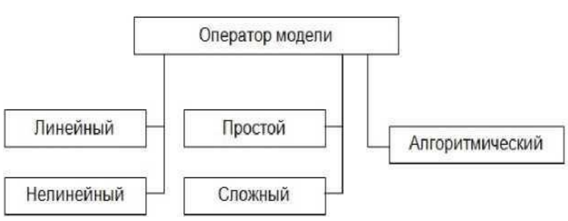

Рис. 2. Классификация математических моделей в зависимости от оператора модели

Классификация математических моделей в зависимости *от входных и выходных параметров* представлена на рис. 3. По характеру моделируемого процесса модели подразделяются на:

- детерминированные, которые соответствуют детерминированным процессам, имеющим строго однозначную связь между физическими величинами, характеризующими состояние системы в какой-либо момент времени; детерминированная модель позволяет однозначно вычислить и предсказать значения выходных величин по значениям входных параметров и управляющих воздействий;

- неопределенные, которые исходят из того, что изменение определяющих величин происходит случайным образом, и значения выходных величин находятся в вероятностном соответствии с входными величинами и не определяются однозначно.

Рис. 3. Классификация математических моделей в зависимости от входных и выходных параметров

Модели с неопределенными параметрами можно разделить на следующие группы:

• Стохастические - значения всех или отдельных параметров модели определяют случайные значения, заданные плотностями вероятности.

* Случайные - значения всех или отдельных параметров модели определяются случайными величинами, которые зависят от оценки вероятности, установленной при обработке ограниченной экспедиционной выборки этих параметров.

* Интервальные - значения всех или отдельных параметров модели описываются значениями интервала, определяемыми минимальными и максимально возможными значениями параметров.

* Размытые - значения всех или отдельных параметров модели описываются функциями принадлежности соответствующей нечеткому множеству.

Модели классифицируются на одномерные, двумерные и трехмерные модели с точки зрения размерности пространства. Это деление применимо к моделям, которые имеют пространственные координаты в качестве параметров.

С точки зрения времени модели делятся на динамические и статические модели. Некоторые свойства моделей неизменны, то есть они не меняют свои значения с течением времени, а некоторые также меняются в соответствии с определенными законами. Если состояние системы меняется с течением времени, модели называются динамическими, иначе статическими. Стопроцентное моделирование описывает состояние объекта в фиксированное время и динамическое моделирование для изучения объекта во времени.

Разделение моделей на качественные и количественные, дискретные и непрерывные, а также смешанные модели осуществляется в зависимости от типа используемых параметров модели. В дискретных моделях описывается, как изменять параметры исключительно на отдельные (дискретные) моменты времени. Например, модель движения свободно падающего тела ($S_t=g\cdot t^2/2$), когда она смотрит на положение тела в определенных точках ($t=0, 1, 2, ..., 10$). В последовательных моделях описываются изменения параметров для всех моментов времени с определенного временного интервала. Например, модель $S=gt^2/2$, $0<t<100$ непрерывна (0...100) в течение некоторого периода времени.

В зависимости от способа реализации модель делится на аналитические, по возможности полученные выходные параметры в виде аналитических выражений, и на алгоритмические, которые используют только приближенные значения для искомых параметров (рис. 4).

Рис. 4. Классификация математических моделей в зависимости от метода реализации модели

По объектам исследования математические модели классифицируются на:

- объекты с высокой информацией, когда в модельном процессе известны полные системы уравнений, описывающие все стороны моделируемого процесса и все числовые значения параметров этих уравнений;

- объекты с нулевым информационным уровнем; математическая модель такого объекта основана на статистических экспериментальных данных;

- объекты с известными базовыми шаблонами; значения в математических уравнениях описания модели устанавливаются на основе опыта;

- Объекты, о поведении которых имеются сведения эмпирического характера; они используют методы физического моделирования с использованием математического планирования эксперимента.
- Классификация математических моделей по порядку вычислений. Разделите на прямой, обратный, индуктивный:
- как раз используются для определения кинетических, статических и динамических закономерностей и процессов;
- инверсии (инверсии) используются, например, для определения допустимых отклонений режимов редактирования;
- индуктивные используются для уточнения математических уравнений кинетики, статики или динамики процесса с использованием новых гипотез или теорий.

Специфичность всех типов моделей в первую очередь отражается в задаче и форме начальных и граничных условий.

В прямых моделях кинетические образцы характеризуют течение процесса с течением времени и отмечают изменение его параметров с течением времени: концентрация, температура, химический состав в соответствии с известными потоками и параметрами рабочих органов. Статические модели определяют конечные критические и равновесные значения технологических и рабочих параметров. Статические уравнения в основном получены при обработке экспериментальных данных. Динамические шаблоны определяют свойства объектов при запуске систем автоматического управления. Динамические свойства определяются характером начальной реакции объекта на стандартные входные колебания. Например, обычные нарушения химической технологии включают изменения концентрации и давления.

Примеры математических моделей

Есть много примеров, когда моделирование помогло не только объяснить все явления в природе, технологии или физике, но и предсказать или сделать новые открытия в тех областях человеческой деятельности, без которых цивилизация с трудом справляется сейчас. Достаточно упомянуть о важности для современной деятельности электротехники и электроники, машиностроения и приборов, производства, передачи и совместного хранения энергии. В естественных науках наиболее распространены физические и математические модели. Нет сомнений в том, что процесс математизации, разработки и применения математических моделей и математических аппаратов в ближайшие годы еще больше усилится. Это объясняет повышенный интерес к использованию математики в последние годы: как создаются математические модели, как они изучаются, как они интерпретируются и т. д.н. Давайте рассмотрим примеры математических моделей в различных областях.

Уравнения математической физики — дифференциальные уравнения в частных производных, которые описывают процессы в пространстве и времени. Уравнение в частных производных в трехмерном пространстве впервые ввел Пьер Симон Лаплас:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=0$$

Уравнения в частных производных используются для описания таких физических явлений, как теплопроводность, колебания струны, распространения линейных волн различной физической природы и др.

Фундаментальное уравнение волновой и квантовой механики, открытое австрийским физиком Эрвином Шредингером, которое описывает движение частицы в заданном потенциальном поле.

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi+U\Psi,$$

где: Ψ — волновая функция, U — потенциальная энергия.

Уравнение Шредингера играет в квантовой теории такую же роль, как основное уравнение динамики в классической механике. Данное уравнение было именно найдено, оно описывает новые фундаментальные закономерности, которые невозможно вывести из прежних классических представлений и теорий. Справедливость его установления в том, что все вытекающие из него следствия и решения подтверждены экспериментально.

Уравнение диффузии. Эффективная плотность многокомпонентной смеси согласно определению, находится как сумма плотностей отдельных компонентов $\rho_e = \rho_1 +... + \rho_k +... + \rho_n$. Массовая концентрация компонентов представляет собой отношение плотности k-компонента кэффективной плотности смеси $c_k = \rho_k / \rho_e$. Эта характеристика смеси может быть отождествленас удельной экстенсивной характеристикой системы, а, поскольку представляет массу k- компонента, приходящуюся на единицу массы смеси. В таком случае можно записать уравнение баланса массы k-компонента смеси в виде

$$\rho_e\frac{dc_k}{dt}+div\overrightarrow{I_k}=\omega_k$$

Неравномерное распределение вещества k-компонента в объеме смеси порождает потоки вещества, стремящиеся сгладить эту неравномерность. Величина плотности этих потоков определяется эмпирическим законом Фика

$$\overrightarrow{I_k}=-D_k*\nabla c_k,$$

Где: D_k — коэффициент диффузии k-компонента в смеси, который в общем случае зависит от концентрации c_k; ω_k — производство вещества k-компонента в смеси в единице объема вединицу времени.

Подстановка последнего выражения в уравнение материального баланса k-компонента приводит к уравнению диффузии

$$\rho_e \frac{dc_k}{dt} = div(D_k * \nabla c_k) + \omega_k$$

Материальная скорость изменения концентрации при этом определяется выражением

$$\frac{dc_k}{dt} = \frac{dc_k}{\partial t} + \overrightarrow{(v_k}, \nabla c_k$$

Уравнения движения жидкостей и газа. Формы уравнений движения жидкости и газа в идеальной среде принимают следующий вид:

$$p\frac{d\vec{v}}{dt} = p\overrightarrow{f_m} - \nabla p$$

Полученное уравнение называется уравнением Эйлера. Данное уравнение часто используется для решения различных прикладных задач гидродинамики и газодинамики. В частности, интегрированием этого уравнения при постоянной плотности жидкости получается известное уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости

$$\frac{pv^2}{2} + p = const$$

Для движения вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости μ получаем

$$p\frac{d\vec{v}}{dt} = p\overrightarrow{f_m} - \nabla p + \mu\Delta\vec{v}$$

Данное выражение получило название уравнение Навье–Стокс. Уравнения Навье–Стокса считаются одними из основных в гидродинамике, а также используются в математическом моделировании многих естественных явлений, а также технических задач.

Находясь дополненной уравнениями переноса тепла, а также также переноса массы, а также определенных массовых сил, система уравнений Навье–Стокса может описывать конвекцию, термодиффузию в жидкостях, действия многокомпонентных смесей всевозможных жидкостей и т. п.

В случае если же в уравнение в качестве массовой силы использовать силу Лоренца и расширить систему уравнениями Максвелла для поля в сплошной среде, в таком случае модель дает возможность описывать явления электро- и магнитогидродинамики. В частности, подобные модели благополучно применяются при моделировании поведения плазмы, межзвездного газа.

Одним из применений системы уравнений Навье–Стокса считается описание течений в мантии Земли («проблема динамо»).

Кроме того, разновидности уравнения Навье–Стокса применяются с целью описания движения воздушных масс атмосферы, в частности при формировании прогноза погоды. С целью описания реальных течений в разных технических устройствах приемлемую точность численного решения можно получить только лишь при такой расчетной сетке, ячейки которой меньше самого мелкого вихря. Это требует очень больших расходов расчетного времени на современных компьютерах. Поэтому были сформированы разнообразные модели турбулентности, упрощающие расчет реальных потоков.

Если по каким-либо причинам в уравнении Навье–Стокса можно отбросить инерционные члены, то получим уравнение, которое называется уравнением Стокса:

$$\mu\Delta\vec{v} = \nabla p - p\overrightarrow{f_m}$$

Модель «хищник-жертва». Математическая модель наиболее простой, т.е. двувидовойсистемы «хищник-жертва», основывается на следующих предположениях:

1) численности популяций жертв N и хищников M зависят только от времени;

2) в отсутствие взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса; при этом число жертв увеличивается, а также число хищников падает, так как им в этом случае нечем питаться:

$$\frac{dN}{dt} = aN, \qquad \frac{dM}{dt} = -\beta M, \ \ a > 0, \ \ \beta > 0$$

где α и β — коэффициенты рождаемости и смертности;

3) естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаютсянесущественными;

4) эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;

5) скорость роста численности жертвы уменьшается пропорционально численности хищников M, c> 0, а также темп роста хищников увеличивается пропорционально численности жертвы dN.

Учитывая указанные выше предположения, получаем систему уравнений Лотки— Вольтерра.

$$\frac{dN}{dt} = (a - cM)N,$$

$$\frac{dM}{dt} = (-\beta + dN)M$$

Численности популяций жертвы и хищника совершают периодические колебания вокруг положения равновесия. Амплитуда колебаний и их период определяются начальными значениями численностей N (0), M (0). Колебания, сущность которых вполне понятна (и они реально наблюдаются в природе), означают возникновение в двувидовых популяционных системах значительно более сложных процессов, чем в одновидовых системах.

Более точные математические описания двувидовых взаимодействий учитываютнеравномерность распределения численности популяций на занимаемых территориях (им соответствуют системы уравнений в частных производных), временное запаздывание между рождением особей и их зрелостью и т. д. Возникают гораздо более сложные картины взаимодействия, как по времени, так и в пространстве.

Список литературы

1. *Борщев А., Карпов Ю., Колесов Ю.* Спецификация и верификация систем логического управления реального времени. В сб." Системная информатика". Вып. 2. ИСИ СО РАН. Н-ск, 1993. С. 35.
2. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем. М.: «Наука», 1978. С. 17.
3. *Калман Р., Фалб П.* Очерки по математической теории систем. М.: «Мир», 1971. С. 44.
4. *Прицкер А.* Введение в имитационное моделирование и язык СЛАМ II. М.: «Мир», 1987. С. 227.
5. Программное обеспечение моделирования непрерывно-дискретных систем (под ред. В. Глушкова). М.: «Наука», 1975. С. 25.
6. Теория систем. Математические методы и моделирование. Сб. статей под ред. А. Колмогорова, С. Новикова. М.: «Мир«, 1989. С. 56.