

# СИНТЕЗ СТРУКТУРЫ УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ЗАДАНЫМ ОБЪЕКТОМ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Прохорова О.В.

Прохорова Ольга Витольдовна - доктор технических наук, доцент,  
кафедра вычислительной техники,  
Институт Автоматики и Информационных технологий Самарский государственный технический университет,  
г. Самара

**Аннотация:** в статье рассмотрен подход к синтезу систем автоматического управления (САУ), базирующийся на методе моделирования процессов в комплексной  $s$  – плоскости. Класс рассматриваемых систем – многопараметрические, линейные.

**Ключевые слова:** система автоматического управления, динамические и статические характеристики, переходной процесс, передаточная функция, полюса и нули, эталонная система, целевая функция.

Придание синтезируемой САУ желаемых статических и динамических свойств является сложной, трудоемкой задачей и в то же время важной и актуальной.

Рассмотрим постановку задачи синтеза САУ, целью решения которой является придание системе управления желаемых статических и динамических свойств.

Критерий качества переходных процессов САУ основан на понятии допустимой области переходных процессов в системе. Обозначим через  $Y(t)$ - вектор управляемых параметров объекта управления (ОУ), через  $U(t)$  и  $f(t)$  - соответственно векторы управляющих и возмущающих воздействий на объект управления, а начальное состояние ОУ зададим условием  $Y(t_0) = Y_0$ . Тогда задача синтеза САУ, обладающей заданными статическими и динамическими свойствами может быть рассмотрена в следующей постановке.

Для объекта управления, заданного системой уравнений динамики вида:

$$Y(t) = A(p) \cdot Y(t) + B(p) \cdot U(t) + C(p) \cdot f(t), \quad (Y(t_0) = Y_0), \quad (1)$$

где  $A(p)$ ,  $B(p)$ ,  $C(p)$  – операторные полиномы,  $p = d/dt$ , требуется синтезировать управляющее устройство в виде регулятора (РГ), обеспечивающее в статическом режиме при всех возмущениях  $f$  и начальном состоянии объекта управления  $Y_0$  асимптотическое приближение выхода замкнутой системы управления  $Y$  к заданному командному сигналу  $\tilde{Y}$  и обеспечивающее в динамическом режиме переходной процесс  $h$  в канале вход - выход, принадлежащий заданной области допустимых значений. Требования могут быть записаны в виде формул:

$$|Y(t \rightarrow \infty) - \tilde{Y}| \leq \Delta, \quad (2)$$

$$|h(t > T) - h(t \rightarrow \infty)| \leq \Delta, \quad (3)$$

$$| \max_{(0 < t \leq T)} h(t) - h(t \rightarrow \infty) | \leq \delta, \quad (4)$$

а также заданный показатель колебательности  $\mu$ . Здесь  $\Delta, \delta, T$  - соответственно заданные статическая ошибка, перерегулирование и время регулирования САУ.

Анализ проблемы синтеза САУ, выполненный автором, позволил установить, что задача синтеза может быть решена посредством перехода из временной области в комплексную  $s$  - область на основе прямого преобразования Лапласа от математической модели САУ вида:

$$y(t) = \int_0^t W(t - \tau) r(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где  $y(t)$  - выходной сигнал объекта управления (управляемый),  $r(\tau)$  - входное воздействие (командный сигнал),  $W_{ij}(t - \tau)$  - ядро преобразования входного сигнала в выходной, и требований на качество во временной области (2) - (4) к математической модели:

$$y(s) = \int_0^{\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt, \quad (s = \sigma + j\omega), \quad (6)$$

представимой в комплексной  $s$  - области в виде:

$$Y(s) = W(s) \cdot R(s), \quad (7)$$

и требованиям на качество вида:

$$|Y(x, s) - \tilde{Y}(s)|_{s=0} \leq \Delta, \quad (8)$$

$$s_e \in \Omega, \quad (\Omega = \sigma + j\omega : \sigma \leq -\eta, \eta > 0, |\omega| \leq \mu |\sigma|). \quad (9)$$

В формулах (8) – (9) приняты следующие обозначения:  $Y(s)$  - выходной (управляемый) сигнал объекта управления;  $R(s)$  - задающее воздействие;  $W(s)$  – передаточная функция (ПФ) замкнутой системы;  $\tilde{Y}$  - командный сигнал;  $s_e = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  - вектор полюсов, т.е. корней характеристического уравнения САУ;  $\Omega$  - область расположения полюсов, ограниченная линией равной степени устойчивости  $\sigma = -\eta$  и линиями постоянного демпфирования  $\psi = \pm \arctang(\mu)$ ;  $\eta$  - степень устойчивости;  $\mu$  - показатель колебательности.

Качество управления САУ будем анализировать по переходным характеристикам, что позволяет подавать на вход канала управления единичную ступенчатую функцию с передаточной функцией  $R(s) = 1/s$ .

Переход в процессе моделирования из временной области в  $s$  - область позволяет искать решение поставленной задачи на основе итерационной процедуры, включающей решение задачи параметрической оптимизации на каждом этапе выбора варианта структуры управляющего устройства. Выбор варианта структуры устройства управления связан с заданием на начальной итерации отрицательной обратной связи по  $Y$  - управляемому параметру объекта управления (ОУ) и заданием регулятора канала управления. На последующих итерациях сложность передаточной функции регулятора постепенно увеличивается одновременно с размерностью вектора параметров регулятора с целью достижения требуемого качества.

Процедура синтеза предусматривает на каждом этапе выбора структуры регулятора решение задачи параметрической оптимизации САУ в следующей постановке:

Для САУ, поведение которой описывается системой уравнений требуется найти такое значение вектора оптимизируемых параметров  $X = X_{\text{opt}}$  ( $X$  - вектор неизвестных заранее коэффициентов передаточной функции синтезированного регулятора), при котором САУ будет обладать требуемым качеством (8) – (9) и будет максимально приближена к эталонной таким образом, чтобы целевая функция  $F(X)$ , характеризующая такое приближение, принимала бы минимальное значение, в идеале нулевое.

$$Y(X, s) = W(X, s) \cdot R(s), \quad (s = \sigma + j\omega) \quad (11)$$

Приближение понимается в смысле приближения полюсов и нулей ПФ моделируемой САУ и эталонной. В качестве полюсов и нулей рассматриваются корни полиномов знаменателя и числителя ПФ САУ соответственно. В качестве эталонной САУ рассматривается система управления, имеющая желаемое расположение полюсов и нулей передаточной функции полностью удовлетворяющая требованию (9).

Остановимся на приближении полюсов и нулей ПФ. Для этого сформируем целевую функцию такого приближения. Представим ПФ синтезированной САУ, состоящей из ОУ и РГ, в виде дробно рациональной функции:

$$W(X, s) = \frac{\sum_{e=0}^m c_e(X) \cdot s^e}{\sum_{e=0}^n d_e(X) \cdot s^e} \quad (s = \sigma + j\omega), \quad (12)$$

которая при  $X = X^{(0)}$  имеет полюсы  $s_e^p$ , ( $e = 1 \dots n$ ) и нули  $s_e^z$ , ( $e = 1 \dots m$ ). Предположим, что расположение полюсов и нулей такой ПФ при  $X = X^{(0)}$  нарушает условия (8) - (9). Тогда для улучшения статических и динамических свойств проектируемой САУ зададим эталонную САУ расположением полюсов и нулей, удовлетворяющим требованиям на качество.

Пусть в качестве полюсов и нулей передаточной функции эталонной САУ выбраны:

$$\tilde{s}_e^p, \quad (e = \overline{1, n}) \quad \text{и} \quad \tilde{s}_j^z, \quad (j = \overline{1, m}).$$

Тогда воспользовавшись известными формулами перехода от корней полинома к его коэффициентам, определим коэффициенты полиномов числителя и знаменателя ПФ эталонной САУ, получим:

$$\sum_{e=1}^m \tilde{s}_e^z = -\tilde{c}_{m-1}/\tilde{c}_m; \quad \sum_{e,j=1}^m \tilde{s}_e^z \cdot \tilde{s}_j^z = \tilde{c}_{m-2}/\tilde{c}_m; \dots; \prod_{e=1}^m \tilde{s}_e^z = (-1)^m \cdot \tilde{c}_0/\tilde{c}_m;$$

$$\sum_{e=1}^n \tilde{s}_e^p = -\tilde{d}_{n-1}/\tilde{d}_n; \quad \sum_{e,j=1}^n \tilde{s}_e^p \cdot \tilde{s}_j^p = \tilde{d}_{n-2}/\tilde{d}_n; \dots; \prod_{e=1}^n \tilde{s}_e^p = (-1)^n \cdot \tilde{d}_0/\tilde{d}_n;$$

где  $\tilde{c}_e$  и  $\tilde{d}_e$  - соответственно коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции эталонной САУ, то есть коэффициенты полиномов

$\tilde{C}(s)$  и  $\tilde{D}(s)$  Используя полученные результаты, запишем выражение передаточной функции эталонной САУ в виде:

$$\tilde{W}(s) = \sum_{e=0}^m \tilde{c}_e s^e / \left( \sum_{e=0}^n \tilde{d}_e s^e \right)$$

Приравняв знаменатель ПФ к нулю, получим характеристическое уравнение САУ. Для приближения проектируемой системы к эталонной достаточно воспользоваться приближением коэффициентов их передаточных функций.

Такое приближение реализуется за счет минимизации целевой функции, представляющей собой средне – квадратичную ошибку аппроксимации.

$$F(x) = 1/2 \left\{ \sum_{e=0}^m [c_e(x) - \tilde{c}_e]^2 + \sum_{e=0}^n [d_e(x) - \tilde{d}_e]^2 \right\} \rightarrow \min.$$

Как показали проведенные расчеты проектирования, для синтеза САУ с заданным качеством бывает достаточно оптимизировать параметры регулятора только по коэффициентам характеристического уравнения САУ, т.е. минимизируя целевую функцию вида:

$$F(x) = 1/2 \left\{ \sum_{e=0}^n [d_e(x) - \tilde{d}_e]^2 \right\} \rightarrow \min.$$

Покажем изложенное на примере синтеза САУ для объекта, заданного своей ПФ вида:

$$W^{OP}(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+6}.$$

Учитывая степень ПФ объекта регулирования, зададим ПФ регулятора (РГ) в виде

$$W^{PG}(X,s) = \frac{x_1 s^2 + x_2 s + x_3}{s^2 + x_4 s}.$$

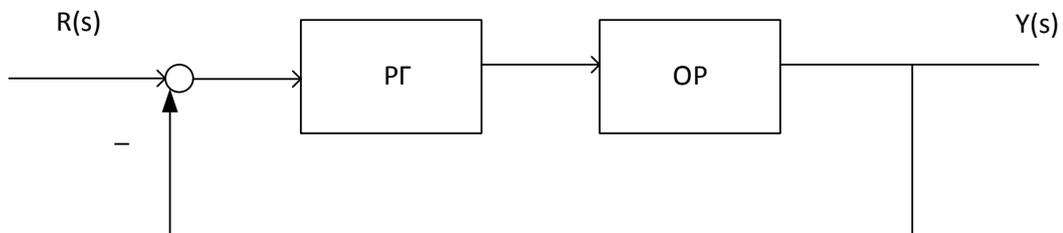


Рис. 1. Схема САУ.

Вычислим ПФ разомкнутой и замкнутой САУ:

$$W^{раз.}(X, s) = \frac{x_1 s^2 + x_2 s + x_3}{s^2 + x_4 s} \cdot \frac{s + 5}{s^2 + 5s + 6} =$$

$$\frac{x_1 s^3 + (5x_1 + x_2)s^2 + (5x_2 + x_3)s + 5x_3}{s^4 + (5 + x_4)s^3 + (6 + 5x_4)s^2 + 6x_4 s} = \frac{C(X, s)}{D(X, s)}.$$

$$W_{CAP}(X, s) = \frac{C(X, s)}{C(X, s) + D(X, s)} =$$

$$\frac{x_1 s^3 + (5x_1 + x_2)s^2 + (5x_2 + x_3)s + 5x_3}{s^4 + (5 + x_4 + x_1)s^3 + (6 + 5x_4 + 5x_1 + x_2)s^2 + (5x_2 + x_3 + 6x_4)s + 5x_3}.$$

Для нахождения параметров вектора  $X$  воспользуемся заданием эталонной САР через расположение полюсов, при котором будут выполняться заданные требования на качество управления динамикой и статикой процесса, а именно: степень устойчивости  $\eta \geq 1$ , показатель колебательности  $\mu \leq 1$ , время регулирования  $\leq 2$  сек, статическая ошибка  $\Delta = 0.02$ .

Для этого зададим эталонные корни полинома четвертой степени:  $\tilde{s}_{1,2} = -2 \pm j$ ;  $\tilde{s}_{3,4} = -3 \pm j$ , при которых характеристики качества управления объектом соблюдаются. Полином знаменателя ПФ эталонной САУ примет вид:

$$\tilde{D}(s) = (s - \tilde{s}_1) \cdot (s - \tilde{s}_2) \cdot (s - \tilde{s}_3) \cdot (s - \tilde{s}_4) = s^4 + 10s^3 + 39s^2 + 70s + 50.$$

Составим целевую функцию в виде среднеквадратичной ошибки аппроксимации полинома знаменателя ПФ проектируемой САР и полиномом знаменателя эталонной САР для поиска оптимальных параметров устройства управления, будем иметь:

$$F(X) = 1/2\{[5 + x_4 + x_1 - 10]^2 + [6 + 5x_4 + 5x_1 + x_2 - 39]^2 +$$

$$[5x_2 + x_3 + 6x_4 - 70]^2 + [5x_3 - 50]^2\} \rightarrow \min.$$

Эта функция положительная квадратичная. Ее минимум равен нулю, при равенстве нулю всех слагаемых, т.е. можно составить систему уравнений вида:

$$5 + x_4 + x_1 - 10 = 0$$

$$6 + 5x_4 + 5x_1 + x_2 - 39 = 0$$

$$5x_2 + x_3 + 6x_4 - 70 = 0.$$

$$5x_3 - 50 = 0.$$

Имеем четыре линейных уравнений и 4 неизвестных. Решение системы уравнений дает значения неизвестных:  $x_1 = 1,666$ ;  $x_2 = 8$ ;  $x_3 = 10$ ;  $x_4 = 3,333$ , которые будем считать оптимальными. Подставив эти значения в ПФ САР, получим:

$$W_{CAP}(s) = \frac{1,666s^3 + 16,333s^2 + 50s + 50}{s^4 + 10s^3 + 39s^2 + 70s + 50}.$$

Коэффициенты полинома знаменателя смоделированной САР в точности совпадают с коэффициентами полинома характеристического уравнения эталонной САР с показателями: степень устойчивости  $\eta = 1$ , показатель колебательности  $\mu = 0,5$ , время регулирования  $T_{рег.} = 1,95$  сек, демпфирование = 99,999%, статическая ошибка  $\Delta$  составила 0,02.

Расчеты показали, что методика структурного синтеза систем управления заданными объектами, разработанная автором работает надежно и дает хорошие результаты.

#### Список литературы

1. *Прохорова О.В.* Оптимизация многомерных систем автоматического управления на основе модификации метода корневого годографа. Автореферат. - Москва: МИЭМ, 1998. -30 с.
2. *Прохорова О.В.* Оптимизация и синтез многомерных САУ на основе моделирования процессов в  $s$ -области. Монография. - Москва: АПКИППРО, 2010. - 158 с.
3. *Прохорова О.В., Орлов С.П.* Параметрическая оптимизация систем автоматического управления при задании эталонной САУ корневым годографом или расположением полюсов и нулей. // IEEE II International Conference on Control in Technical Systems (CTS), (25-27 Oct. 2017, SPbGTU LETI). IEEE Conference Publications, IEEE Xplore, 2017. P. 16-19.