

# СИНТЕЗ МНОГОМЕРНОЙ САУ ИЗОТЕРМИЧЕСКИМ ХИМИЧЕСКИМ РЕАКТОРОМ

## Прохорова О.В.

*Прохорова Ольга Витольдовна - доктор технических наук, доцент,  
кафедра информатики и вычислительной техники,  
Институт автоматизации и информационных технологий,  
Самарский государственный технический университет,  
г. Самара*

**Аннотация:** в статье рассмотрен подход к синтезу многомерных систем автоматического управления (САУ), базирующийся на методе моделирования процессов в комплексной  $s$  – плоскости, который позволил создать на его основе общую формализованную процедуру синтеза МСАУ исследуемого класса. Класс рассматриваемых систем – многопараметрические, многосвязные, многомерные, линейные, квази-стационарные.

**Ключевые слова:** система автоматического управления, динамические и статические характеристики САУ, передаточная функция, корни характеристического уравнения, эталонная САУ, целевая функция.

Технологические процессы в химических производствах обычно строятся по непрерывной схеме, когда исходное сырье последовательно проходит через ряд аппаратов и реакторов до получения готового продукта. Протекание процесса на каждом участке всей цепочки технологического процесса определяется физическими и техническими параметрами, к которым относятся температура, давление, концентрация и т.д. Значения параметров, при которых получаемый продукт имеет требуемое качество, как правило, задаются технологическим регламентом производства. Вследствие действия различного рода возмущений параметры могут отклоняться от заданных значений, что приводит к нарушению технологии и ухудшению качества продукта. Поэтому к проектируемым САУ предъявляются жесткие требования, выполнение которых гарантирует стабильность работы при заданных режимах эксплуатации.

Рассмотрим задачу синтеза МСАУ изотермическим химическим реактором и ее решение на основе модификации метода корневого годографа [1-2].

В изотермическом химическом реакторе (ИХР) с непрерывным перемешиванием реагентов происходит необратимая реакция первого порядка:  $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ ; скорости реакций заданы:  $r_1 = k_1 \cdot C_A$ ,  $r_2 = k_2 \cdot C_B$ , где  $k_1, k_2$  - константы скоростей реакций. Работа такого химического реактора описывается уравнениями

$$\begin{aligned} V \left( \frac{dC_A}{dt} \right) &= F(C_{Af} - C_A) - V(k_1 \cdot C_A), & C_A(0) &= C_{A0} \\ V \left( \frac{dC_B}{dt} \right) &= F(C_{Bf} - C_B) + V(k_1 \cdot C_A - k_2 \cdot C_B), & C_B(0) &= C_{B0} \end{aligned} \quad (1)$$

Требуется поддерживать  $C_A$  и  $C_B$  как можно ближе к заданным уставкам  $C_{Ad}$  и  $C_{Bd}$ , изменяя концентрации реагентов А и В, то есть  $C_{Af}$ ,  $C_{Bf}$ .

Если ввести относительные координаты [3]:  $Da_1 = k_1 \cdot V/F$ ,  $Da_2 = k_2 \cdot V/F$ ,  $t = t' F/V$ ,  $Y_1 = C_A/C_{Aref}$ ,  $Y_2 = C_B/C_{Aref}$ ,  $U_1 = C_{Af} / C_{Aref}$ ,  $U_2 = C_{Bf} / C_{Aref}$ , где  $C_{Aref}$  – некоторое произвольно выбранное базовое значение концентрации  $C_A$ , то в этих координатах уравнения (1) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dt} &= -(1 + D_{a_1}) \cdot Y_1 + U_1, & Y_1(0) &= Y_{10} \\ \frac{dY_2}{dt} &= -(1 + D_{a_2}) \cdot Y_2 + D_{a_1} \cdot Y_1 + U_2, & Y_2(0) &= Y_{20} \end{aligned} \quad (2)$$

Задача регулирования формулируется так: поддерживать выходные концентрации  $Y_1$ ,  $Y_2$  на заданных уровнях  $\tilde{Y}_1 = C_A/C_{Aref}$ ,  $\tilde{Y}_2 = C_B/C_{Aref}$ , изменяя входные концентрации  $U_1$  и  $U_2$ .

Задача синтеза системы управления реактором состоит в синтезе структуры системы управления и ее параметров, при которых установившиеся значения на выходах реактора  $Y_1(\infty)$  и  $Y_2(\infty)$  были бы максимально приближены к задающим воздействиям  $\tilde{Y}_1$  и  $\tilde{Y}_2$  соответственно, а динамические характеристики системы управления были удовлетворительными. Требуется проанализировать работу синтезированной системы управления для режимов:

$$\begin{aligned} D_{a_1} &= 1; D_{a_2} = 2; \tilde{Y}_1 = 0,618; \tilde{Y}_2 = 0,0308; \\ Y_{10} &= 1; Y_{20} = 0; & Y_{10} &= 0; Y_{20} = 0. \end{aligned}$$

Переформулируем задачу, вводя уточнение требований, предъявляемых к динамике синтезируемой МСАУ и осуществляя переход от рассмотрения работы ИХР во временной области к рассмотрению в комплексной плоскости  $s = \sigma + j\omega$ .

Для этого введем в рассмотрение:

- вектор констант реактора в виде  $P = (1 + Da_1, 1 + Da_2)^T$
- вектор задающих и возмущающих воздействий
- вектор сигналов на выходах реактора в виде  $Y = (Y_1, Y_2)^T$ ;
- вектор управляющих воздействий  $U = (U_1, U_2)^T$ ;
- вектор настройки параметров устройства управления

$V = (V_1, V_2, \dots, V_k)$ , где  $R_1 = \tilde{Y}_1, R_2 = \tilde{Y}_2, R_3 = Y_{10}, R_4 = Y_{20}$ ,

$k$  - размерность вектора параметров синтезируемого устройства управления  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ .

Введем также в рассмотрение вектор корней характеристических уравнений каналов входы - выход МСАУ  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ .

Для многосвязных систем управления такие каналы обладают общим знаменателем передаточных функций каналов входы - выход, а значит, общим характеристическим уравнением.

Задача синтеза системы управления реактором формулируется следующим образом. Для ИХР, работа которого описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} s \cdot Y_1(P, R, s) - Y_{10} &= -P_1 \cdot Y_1(P, R, s) + U_1(P, R, s), \\ s \cdot Y_2(P, R, s) - Y_{20} &= (P_1 - 1) \cdot Y_1(P, R, s) - P_2 \cdot Y_2(P, R, s) + U_2(P, R, s), \end{aligned} \quad (3)$$

а требования к качеству работы МСАУ заданы ограничениями вида:

$$\begin{aligned} |s \cdot Y_i(P, R, s) - \tilde{Y}_i|_{s=0} &= 0, \quad i = 1, 2 \\ s \in \Omega, \quad (\Omega = \sigma + j\omega: \sigma \leq -1, |\omega| \leq |\sigma|), \end{aligned} \quad (4)$$

определить структуру МСАУ, закон настройки параметров устройства управления  $V(t_M) = V(P, R, t_M)$  и закон выработки управляющих воздействий  $U(t_M) = U(P, R, t_M)$ , которые бы обеспечили требуемое качество работы МСАУ при вариации во времени задающих, возмущающих воздействий, а также параметров процессов ИХР.

Решение задачи будем строить следующим образом. Прежде всего выразим  $Y_1(\cdot)$  и  $Y_2(\cdot)$  из уравнений (3), получим

$$\begin{aligned} Y_1(P, R, s) &= \frac{U_1(P, R, s) + Y_{10}}{s + P_1}, \\ Y_2(P, R, s) &= \frac{U_2(P, R, s) + Y_{20}}{s + P_2} + \frac{(P_1 - 1) \cdot (U_1(P, R, s) + Y_{10})}{(s + P_1) \cdot (s + P_2)}, \end{aligned}$$

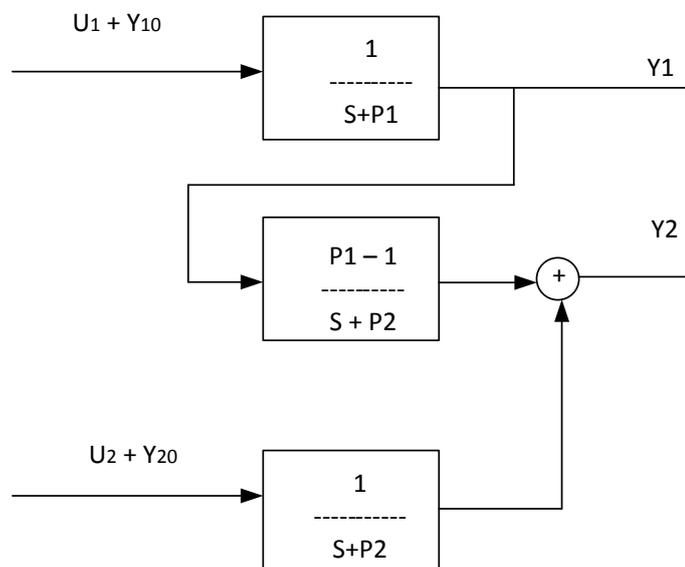


Рис. 1. Схема ИХР

На начальном этапе синтеза структуры МСАУ выберем передаточные функции локальных регуляторов в каналах: 1-й вход – 1-й выход и 2-й вход – 2-й выход в виде безынерционных звеньев с коэффициентами передач  $X_1$  и  $X_2$  соответственно, введем в этих каналах единичные отрицательные обратные связи по задающим воздействиям.

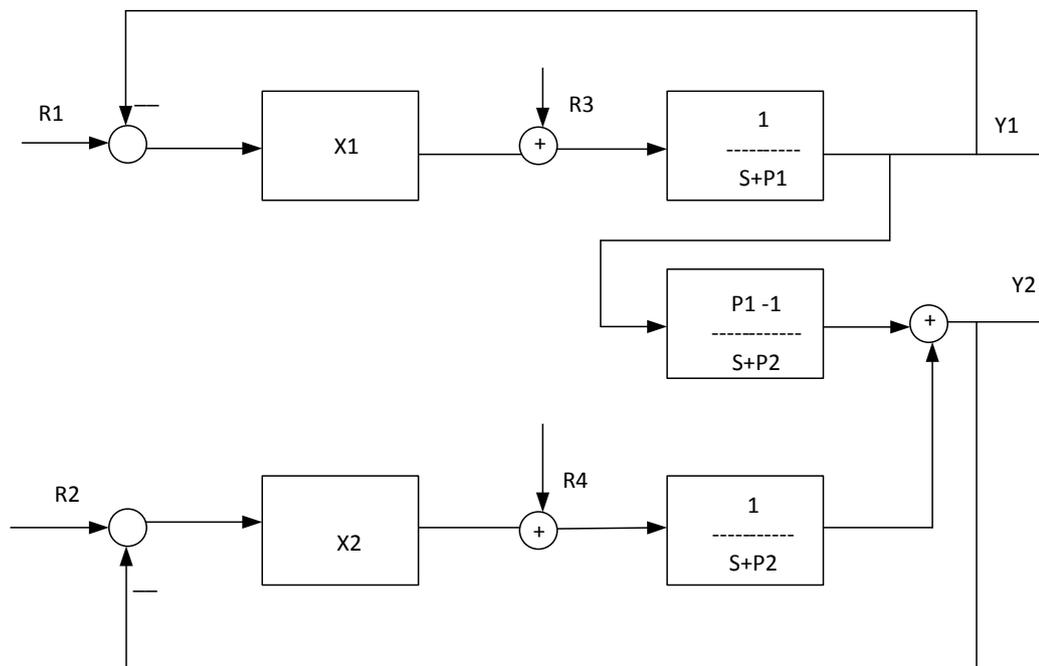


Рис. 2. Структурная схема системы управления.

Найдем матрицу передаточных функций каналов вход - выход, результаты поместим в Таблицу 1. Сформируем выражения  $Y_1(\cdot)$  и  $Y_2(\cdot)$ . Получим:

$$Y_1(P, R, s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(X_1 \cdot R_1 + R_3)}{(s + P_1 + X_1)}, \quad (5)$$

$$Y_2(P, R, s) = \frac{(X_1(P_1 - 1) \cdot R_1 + (P_1 - 1) \cdot R_3) + X_2 \cdot R_2 + R_4}{D} + \frac{X_2 \cdot R_2 + R_4}{s + P_2 + X_2} = \frac{C}{D}. \quad (6)$$

Таблица 1. Матрица передаточных функций каналов вход – выход.

$W_{11} = X_1 / (s + P_1 + X_1)$	$W_{21} = X_1 (P_1 - 1) / D$
$W_{12} = 0$	$W_{22} = X_2 / (s + P_2 + X_2)$
$W_{13} = 1 / (s + P_1 + X_1)$	$W_{23} = (P_1 - 1) / D$
$W_{14} = 0$	$W_{24} = 1 / (s + P_2 + X_2)$

$$D = s \cdot (s + P_1 + X_1) \cdot (s + P_2 + X_2) = (s^2 + s(P_1 + P_2 + X_1 + X_2) + P_1 P_2 + X_1 X_2 + P_1 X_2 + P_2 X_1) \cdot s;$$

$$C = (P_1 - 1) \cdot (X_1 R_1 + R_3) + (X_2 R_2 + R_4)(s + P_1 + X_1) = (X_2 R_2 + R_4) \cdot s + X_1 P_1 R_1 + P_1 R_3 - X_1 R_1 - R_3 + X_2 P_1 R_2 + X_1 X_2 R_2 + P_1 R_4 + X_1 R_4.$$

Проверим выполнение условий (4) для схемы Рис. 2. Будем иметь

$$(s \cdot Y_1(P, R, s) - R_1)_{s=0} = X_1 R_1 + R_3 - R_1 P_1 - R_1 X_1 = R_3 - R_1 P_1. \quad (7)$$

Полученный результат свидетельствует о том, что  $Y_1(\cdot)$  с помощью вектора  $X = (X_1, X_2)$  и схемы Рис. 2 нельзя настроить на заданное значение  $R_1$ , поскольку компоненты вектора  $X$  не присутствуют в выражении (7). Следовательно, схема Рис. 2 не удовлетворяет условиям задачи. В связи с этим продолжим дальнейшие действия по синтезу структуры МСАУ.

Усложним передаточные функции локальных регуляторов каналов i-й вход – j-й выход; а именно, безынерционное звено заменим идеальным интегрирующим звеном с передаточной функцией вида  $X_i / s$ .

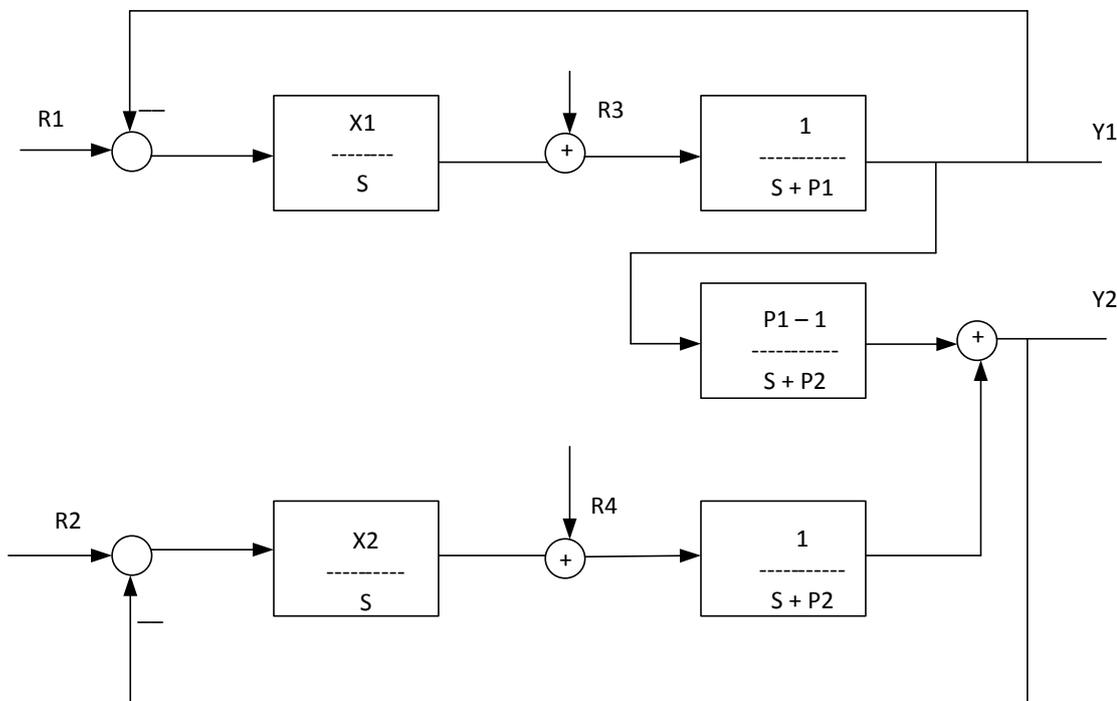


Рис. 3. Структурная схема МСАУ.

Определим для нее передаточные функции каналов вход - выход, используя формулу Меона [4], результаты поместим в Таблицу 2.

Таблица 2. Передаточные функции каналов вход – выход.

$W_{11} = X_1 / (s^2 + P_1s + X_1)$	$W_{21} = X_1 s (P_1 - 1) / D$
$W_{12} = 0$	$W_{22} = X_2 / (s^2 + P_2s + X_2)$
$W_{13} = s / (s^2 + P_1s + X_1)$	$W_{23} = (P_1 - 1) s^2 / D$
$W_{14} = 0$	$W_{24} = s / (s^2 + P_2s + X_2)$

Здесь  $W_{ij}$  есть передаточная функция j-го входного воздействия к i-му выходу. Найдем  $Y(P, X, R, s)$ :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_1 \\ R_1 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

$$Y_1(P, R, s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(R_3 s + X_1 R_1)}{(s^2 + P_1 s + X_1)}, \quad (8)$$

$$Y_2(P, R, s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(P_1 - 1) \cdot (X_1 R_1 \cdot s + R_3 s^2)}{D} + \frac{(X_2 R_2 + R_4 \cdot s)}{s^2 + s \cdot P_2 + X_2} = \frac{1}{s} \cdot \frac{C}{D}, \quad (9)$$

где

$$D = (s^2 + P_2s + X_2) \cdot (s^2 + P_1s + X_1) = \\ (s^4 + (P_1 + P_2)s^3 + (P_1P_2 + X_2 + X_1)s^2 + (X_1P_2 + X_2P_1)s + X_1X_2);$$

$$C = (P_1 - 1) \cdot (X_1R_1s + R_3s^2) + (X_2R_2 + R_4s) \cdot (s^2 + P_1s + X_1) = \\ R_4s^3 + (P_1R_3 - R_3 + X_2R_2 + P_1R_4)s^2 + (P_1X_1R_1 - X_1R_1 + \\ X_2P_1R_2 + X_1R_4)s + X_1X_2R_2.$$

Найдем величины статической ошибки по каждому каналу управления, получим:

$$s \cdot Y_1(P, R, s = 0) - R_1 = R_1 - R_1 = 0.$$

$$s \cdot Y_2(P, R, s = 0) - R_2 = R_2 - R_2 = 0.$$

Анализ установившихся значений на выходах ИХР показывает, что накладываемые на них ограничения в соответствии с постановкой задачи выполнены. Перейдем к анализу динамических характеристик на выходах ИХР при подаче на все входы САУ одних и тех же типовых воздействий. Известно, что эти характеристики во многом зависят от расположения корней характеристических уравнений каналов входы - выход, то есть от расположения корней характеристических уравнений каналов входы - выход по каждому из двух выходов, т.е. по  $Y_1$  и  $Y_2$ :

$$D_1(s, P) = s^2 + P_1s + X_1 = 0 \quad (10)$$

$$D_2(s, P) = (s^2 + P_1s + X_1) \cdot (s^2 + P_2s + X_2) = 0. \quad (11)$$

По условию задачи требуется, чтобы  $s = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in \Omega$ ,

где  $\Omega$  - область, расположенная в левой полуплоскости комплексной плоскости и ограниченная линиями равной степени устойчивости  $\sigma \leq -1$  и постоянного демпфирования  $|\omega| \leq 1$ . Следовательно, если учесть, что для уравнения (10)

$$S_{1,2}^{(1)} = -\frac{P_1}{2} \pm \frac{\sqrt{P_1^2 - 4X_1}}{2}, \text{ а для уравнения (11)}$$

$$s_{1,2}^{(II)} = s_{1,2}^{(I)} \text{ и } S_{3,4}^{(2)} = -\frac{P_2}{2} \pm \frac{\sqrt{P_2^2 - 4X_2}}{2}, \text{ корни будут следующие из условия равенства нулю}$$

дискриминантов:

$$P_1^2 - 4 \cdot X_1 = 0. \quad (12)$$

$$P_2^2 - 4 \cdot X_2 = 0. \quad (13)$$

следует, что корни характеристического уравнения первого канала входы - выход будут находиться в левой полуплоскости и определяться значениями  $-P_1/2$ , а корни характеристического уравнения второго канала входы - выход будут также находиться в левой полуплоскости и определяться значениями  $-P_1/2$  и  $-P_2/2$ . Отметим, что по условию задачи  $P_1, P_2 > 0$ . Следовательно, из уравнений (12) и (13) можно определить значения  $X_1$  и  $X_2$ :

$$X_1 = \frac{P_1^2}{4}, \quad X_2 = \frac{P_2^2}{4}. \quad (14)$$

Аналогичные результаты можно было получить, минимизируя целевую функцию, составленную из суммы квадратов невязок коэффициентов характеристических уравнений каналов входы - выход синтезируемой и идеальной (эталонной) МСАУ. При этом потребовалось бы задать расположение корней характеристических уравнений каналов входы - выход идеальной МСАУ. Рассмотрим этот подход.

Пусть в качестве идеальных  $s_1, s_2$  заданы значения  $-P_1/2$ , а в качестве  $s_3, s_4$  значения  $-P_2/2$ , что обеспечивает выполнение заданных динамических характеристик (4) идеальной МСАУ. Выбор корней характеристических уравнений идеальной МСАУ основывается на анализе математической модели синтезируемой системы управления. Характеристические уравнения моделируемых каналов идеальной МСАУ примут вид:

$$s^2 + P_1 \cdot s + \frac{P_1^2}{4} = 0,$$

$$(s^2 + P_1 \cdot s + \frac{P_1^2}{4}) \cdot (s^2 + P_2 \cdot s + \frac{P_2^2}{4}) = 0.$$

А целевая функция  $F(X, P)$  будет определяться выражением

$$F(X, P) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left( X_1 - \frac{P_1^2}{4} \right)^2 + \left( X_2 - \frac{P_2^2}{4} \right)^2 \right\} \rightarrow \min.$$

Очевидно, что ее минимум по  $X$  находится в точке

$$(X_1 = P_1^2/4, X_2 = P_2^2/4).$$

Как отмечалось ранее, вектор  $X$  есть вектор настраиваемых параметров регулятора. Следовательно, управляющие воздействия ЭВМ перенастройки в дискретные моменты времени параметров РГ определяются следующим образом:

$$V(t_M) = V(P, t_M) = X(P, t_M) - X(P, t_{M-1}) = \left( \frac{[P_1^2(t_M) - P_1^2(t_{M-1})]}{4}, \frac{[P_2^2(t_M) - P_2^2(t_{M-1})]}{4} \right)^T.$$

В заключение проанализируем работу синтезированной МСАУ для режимов:  $P_1 = 2; P_2 = 3; R_1 = 0,618; R_2 = 0,0308; R_3 = 1; R_4 = 1$  и  $P_1 = 2; P_2 = 3; R_1 = 0,618; R_2 = 0,0308; R_3 = R_4 = 0$ . С этой целью для рассматриваемых режимов найдем выражения функций, описывающих процессы на выходах ИХР. Воспользуемся формулами (8) и (9). Будем иметь:

- для I режима:

$$Y_1^{(I)}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(s + 0,618)}{(s^2 + 2s + 1)};$$

$$Y_2^{(I)}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(1,0693 \cdot s^2 + 0,7566 \cdot s + 0,0693)}{(s^4 + 5 \cdot s^3 + 9,25 \cdot s^2 + 7,5 \cdot s + 2,25)};$$

- для II режима:

$$Y_1^{(II)}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0,618}{(s^2 + 2s + 1)};$$

$$Y_2^{(II)}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(0,0693 \cdot s^2 + 0,7566 \cdot s + 0,0693)}{(s^4 + 5 \cdot s^3 + 9,25 \cdot s^2 + 7,5 \cdot s + 2,25)}.$$

$$Y_1^{(II)}(s) = \frac{1}{s} \cdot 0,618 / (s^2 + 2s + 1);$$

$$Y_2^{(II)}(s) = \frac{1}{s} \cdot (0,693 \cdot s^2 + 0,7566 \cdot s + 0,0693) / (s^4 + 5 \cdot s^3 + 9,25 \cdot s^2 + 7,5 \cdot s + 2,25);$$

Графики функций  $Y_1(s)$  и  $Y_2(s)$  для двух режимов работы ИХР представлены Рис. 4.

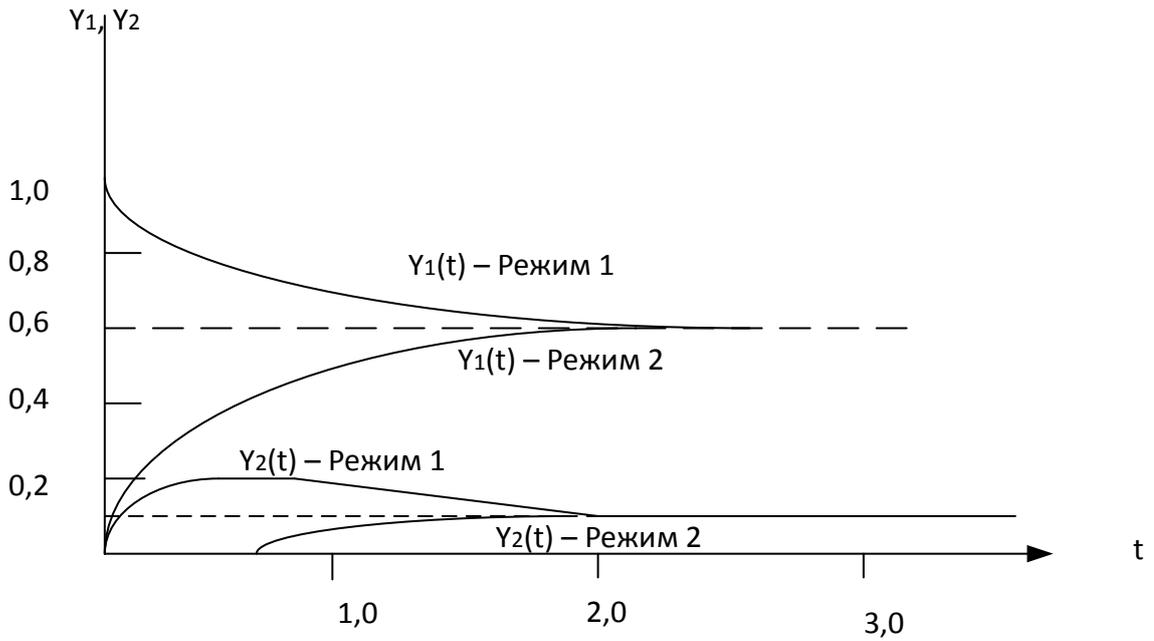


Рис. 4. Графики функций  $Y_1(s)$  и  $Y_2(s)$  для двух режимов работы ИХР.

Они подтверждают эффективность синтезированной МСАУ. Решение подобной задачи было рассмотрено в работе [3], в ходе которого методом параметризации регуляторов были получены выходные характеристики  $Y_1(s)$  и  $Y_2(s)$ , представленные на Рис. 5.

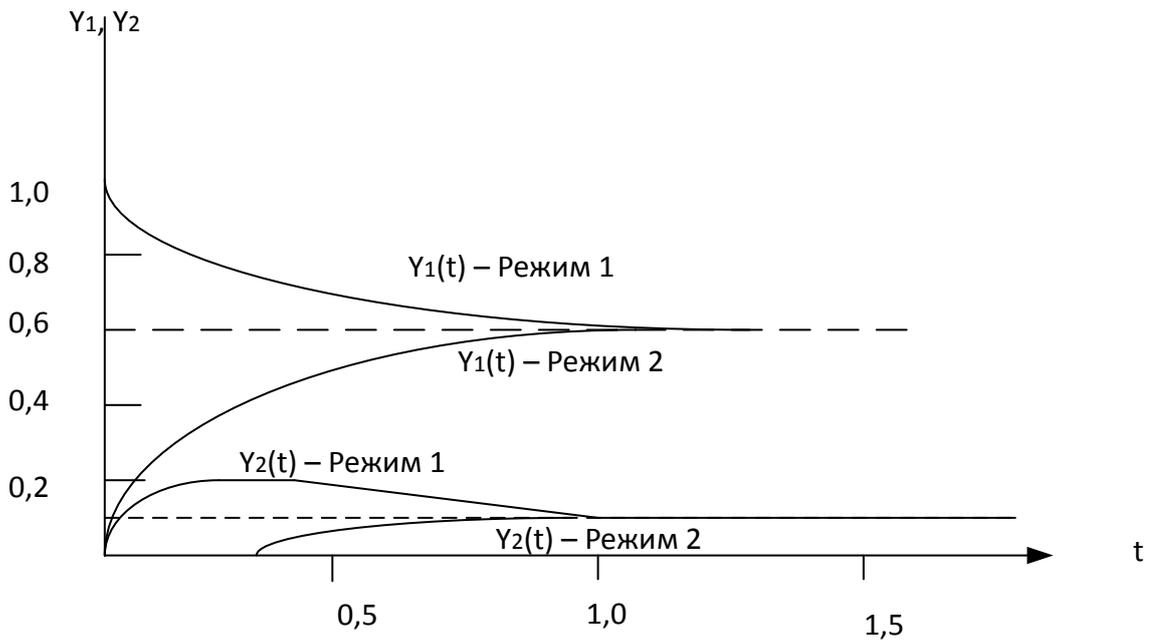


Рис. 5. Характеристики  $Y_1(s)$  и  $Y_2(s)$ .

При этом структура регулятора задавалась вектором управления  $U = X \cdot (Y - \tilde{Y})$  и матричным коэффициентом усиления

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}.$$

параметры которого требовалось подобрать так, чтобы получить минимум критерия

$$I = \int_0^{t_f} \left[ (Y_1 - \tilde{Y}_1)^2 + \alpha(Y_2 - \tilde{Y}_2)^2 + \beta(\hat{U}_2)^2 \right] dt.$$

На управляющие воздействия  $U_1, U_2$  накладывались ограничения  $0 \leq U_1 \leq 2,0$ ;  $0 \leq U_2 \leq 1,0$ . Последнее слагаемое в подынтегральном выражении характеризовало высокую стоимость подачи в реактор реагента В. Синтез оптимального регулятора выполнялся с помощью следующей последовательности действий:

- задание начальных значений элементов  $X$ ;
- решение расчетных уравнений; минимизация критерия  $I$  посредством многомерной процедуры поиска по  $X_i$ ; с целью получения новых значений элементов  $X$ ;
- возвращение к п.2 и повторение до тех пор, пока не было получено приемлемое значение  $X^{(*)}$ .

Как отмечено в работе [3], основным недостатком примененного для решения задачи метода являлась необходимость расчета динамики ИХР на каждой итерации, число итераций на каждом шаге синтеза  $X$  составляло от 50 до 100 итераций.

Решение задачи синтеза системы управления ИХР предложенным автором методом было получено аналитически на основе простых алгебраических выкладок. Полученные результаты отличаются высокой точностью и простотой. Они гарантируют соблюдение всех требований, предъявленных МСАУ. Результаты свидетельствуют о том, что значительным изменениям начального состояния отвечают малые изменения динамики МСАУ и статические характеристики МСАУ не зависят от начальных условий.

#### *Список литературы*

1. Прохорова О.В., Орлов С.П. Параметрическая оптимизация систем автоматического управления при задании эталонной САУ корневым годографом или расположением полюсов и нулей. // IEEE II International Conference on Control in Technical Systems (CTS), (25-27 Oct. 2017, SPbGTU LETI). IEEE Conference Publications, IEEE Xplore, 2017. P. 16-19.
2. Прохорова О.В. Синтез структуры управляющего устройства заданным объектом на основе моделирования процессов в комплексной плоскости. // Научный журнал №2(67), 2023. – С. 4 - 9.
3. Рей У. Методы управления технологическими процессами.- М.: Мир, 1983.- 365 с.
4. Мезон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. - М.: ИЛ, 1963. -619 с.