

СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Прохорова О.В.

Прохорова Ольга Витольдовна - доктор технических наук, доцент,
кафедра вычислительной техники,
Институт Автоматики и Информационных технологий, Самарский государственный технический университет,
г. Самара

Аннотация: в статье рассмотрен подход к синтезу многомерных систем автоматического управления (МСАУ), базирующийся на методе моделирования процессов в комплексной s – плоскости, который позволил создать на его основе общую формализованную процедуру синтеза МСАУ исследуемого класса. Класс рассматриваемых систем – многопараметрические, многосвязные, многомерные, линейные, квази-стационарные.

Ключевые слова: МСАУ, каналы управления, динамические и статические характеристики, переходной процесс, передаточная функция, обобщенная передаточная функция, полюса и нули, эталонная САУ, целевая функция.

Трудности синтеза МСАУ связаны с взаимовлиянием каналов управления, высоким порядком уравнений динамики, большим числом управляемых параметров. Из-за этих особенностей придание МСАУ желаемых статических и динамических свойств является сложной, трудоемкой задачей и в то же время важной и актуальной.

Рассмотрим постановку задачи синтеза МСАУ, целью решения которой является придание системе управления, желаемых статических и динамических свойств.

Для оценки качества МСАУ воспользуемся обобщением критерия качества переходных процессов одномерных систем автоматического управления (САУ) на класс многомерных.

Критерий качества переходных процессов САУ основан на понятии допустимой области переходных процессов в системе. Обозначим через $Y(t)$ вектор управляемых параметров объекта управления (ОУ), через $U(t)$ и $f(t)$ - соответственно векторы управляющих и возмущающих воздействий на объект управления, а начальное состояние ОУ зададим условием $Y(t_0) = Y_0$. Тогда задача синтеза МСАУ, обладающей заданными статическими и динамическими свойствами может быть рассмотрена в следующей постановке.

Для объекта управления, заданного системой уравнений динамики вида:

$$Y(t) = A(p) \cdot Y(t) + B(p) \cdot U(t) + C(p) \cdot f(t), \quad (Y(t_0) = Y_0), \quad (1)$$

где $Y(t)$ – вектор управляемых параметров, $U(t)$ вектор управляющих воздействий, $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ – матрицы операторных полиномов, $p = d/dt$, требуется синтезировать управляющее устройство (УУ), обеспечивающее в статическом режиме при всех возмущениях f и начальном состоянии объекта управления Y_0 асимптотическое приближение выходов замкнутой многомерной системы управления Y_i ($i = 1, \dots, z$) к

заданным командным (задающим) сигналам $\tilde{Y}_i$ и обеспечивающее в динамическом режиме переходные процессы h_i в каналах входы - выход, принадлежащие заданной области допустимых значений:

$$|Y_i(t \rightarrow \infty) - \tilde{Y}_i| \leq \Delta_i, \quad (2)$$

$$|h_i(t > T_i) - h_i(t \rightarrow \infty)| \leq \Delta_i, \quad (3)$$

$$|\max_{(0 \leq t \leq T_i)} h_i(t) - h_i(t \rightarrow \infty)| \leq \delta_i, \quad (4)$$

а также заданный показатель колебательности μ . Здесь Δ_i, δ_i, T_i - соответственно заданные статическая ошибка, перерегулирование и время регулирования i - го канала МСАУ.

Анализ проблемы синтеза МСАУ, выполненный автором, позволил установить, что задача синтеза может быть решена посредством модификации метода корневого годографа. Этот подход потребовал перехода из временной области в комплексную s - область на основе прямого преобразования Лапласа от математической модели МСАУ вида:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^k \int_0^t W_{ij}(t-\tau) r_j(\tau) d\tau, \quad (i = \overline{1, z}), \quad (5)$$

где $y_i(t)$ - выходные сигналы объекта управления (управляемые), $r_j(\tau)$ - входные воздействия, $W_{ij}(t-\tau)$ - ядро преобразования входных сигналов в выходные, и требований на качество во временной области (2) - (4) к математической модели:

$$y_i(s) = \int_0^\infty y_i(t) \cdot e^{-st} dt, \quad (s = \sigma + j\omega), \quad (6)$$

представимой в векторно-матричном виде:

$$Y(s) = W(s) \cdot R(s), \quad (7)$$

и требованиям на качество в комплексной s - области вида:

$$|Y_i(s) - \tilde{Y}_i(s)|_{s=0} \leq \Delta, \quad (8)$$

$$s \in \Omega, \quad (\Omega = \sigma + j\omega: \sigma \leq -\eta, \eta > 0, |\omega| \leq \mu | \sigma |). \quad (9)$$

В формулах (8) – (9) приняты следующие обозначения: $Y(s)$ - вектор выходных сигналов объекта управления; $R(s)$ - вектор задающих воздействий; $W(s) = \{W_{ij}(s)\}_{z \times k}$ - матрица передаточных функций замкнутой системы; $\tilde{Y}$ - вектор командных сигналов; $s_e = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ - вектор полюсов, т.е. корней характеристического уравнения каналов вход – выход (в силу связности каналов он одинаков для всех каналов); Ω - область расположения полюсов, ограниченная линией равной степени устойчивости $\sigma = -\eta$ и линиями постоянного демпфирования $\psi = \pm \arctang(\mu)$; η - степень устойчивости; μ - показатель колебательности.

Считается, что качество МСАУ полностью определяется качеством всех каналов вход – выход. В основу анализа качества управления положим математическую модель в виде передаточной функции (ПФ) канала вход – выход. Назовем такую ПФ обобщенной и обозначим через ОПФ.

Введение такой функции естественно согласно принципу суперпозиции, действующему внутри линейных МСАУ. Обратимся к описанию МСАУ в виде (7), тогда нетрудно убедиться в том, что при подаче на все входы МСАУ одного и того же типового воздействия $R(s)$ на этапе моделирования любой из выходов $Y_i(s)$ будет описываться функцией вида:

$$Y_i(s) = \sum_{e=1}^k W_{ie}(X, s) \cdot R_e(s) = R(s) \cdot \sum_{e=1}^k W_{ie}(X, s), \quad (10)$$

где сумма передаточных функций и есть выражение, определяющее ОПФ по конкретному выходу. Что позволяет провести аналогию с передаточной функцией одномерной САУ и определить ОПФ канала вход – выход, как отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала, подаваемого одновременно на все входы МСАУ при нулевых начальных условиях. Представление об ОПФ позволяет в дальнейшем оперировать ею при анализе качества МСАУ аналогично анализу качества одномерной САУ относительно каждого из каналов вход – выход.

Поскольку класс рассматриваемых систем управления – линейные непрерывные стационарные, то сигнал на выходе канала вход – выход определяется суммой сигналов – откликов, получаемых на выходе при подаче на каждый из входов воздействия поочередно при равенстве нулю воздействий на других входах (принцип суперпозиции). Тот же самый суммарный отклик может быть получен при подаче на все входы воздействий одновременно. Вид входных воздействий не влияет на математическую модель МСАУ.

Качество управления МСАУ будем анализировать по переходным характеристикам, что позволяет подавать на входы каналов единичную ступенчатую функцию с передаточной функцией $R(s) = 1/s$.

Переход в процессе моделирования из временной области в s - область позволяет искать решение поставленной задачи на основе итерационной процедуры, включающей решение задачи параметрической оптимизации на каждом этапе выбора варианта структуры регулятора. Выбор варианта структуры регулятора связан с заданием на начальной итерации отрицательных обратных связей по Y_i - управляемым параметрам объекта управления (ОУ) и заданием локальных регуляторов каналов передачи задающих воздействий в виде пропорциональных звеньев. На последующих итерациях сложность передаточных функций таких регуляторов постепенно увеличивается одновременно с размерностью вектора параметров регулятора с целью достижения требуемого качества.

Процедура синтеза предусматривает на каждом этапе выбора структуры регулятора решение задачи параметрической оптимизации МСАУ в следующей постановке:

$$Y(X, s) = W(X, s) \cdot R(s), \quad (s = \sigma + j\omega) \quad (11)$$

требуется найти такое значение вектора оптимизируемых параметров $X = X_{\text{opt}}$ (X - вектор неизвестных заранее коэффициентов передаточных функций синтезированного многомерного регулятора), при котором МСАУ будет обладать требуемым качеством (8) – (9) и будет максимально приближена к эталонной таким образом, чтобы целевая функция $F(X)$, характеризующая такое приближение, принимала бы минимальное значение, в идеале нулевое.

Приближение понимается в смысле приближения полюсов и нулей ОПФ моделируемой МСАУ и эталонной. В качестве эталонной МСАУ рассматривается система управления, имеющая желаемое расположение полюсов и нулей передаточных функций каналов.

Цель параметрической оптимизации может быть достигнута приближением полюсов и нулей ОПФ к эталонным. Остановимся на приближении полюсов и нулей ОПФ. Для этого сформируем целевую функцию такого приближения. Представим ПФ в виде дробно рациональной функции:

$$W(X, s) = \frac{\sum_{e=0}^m c_e(X) \cdot s^e}{\sum_{e=0}^n d_e(X) \cdot s^e} \quad (s = \sigma + j\omega), \quad (12)$$

которая при $X = X^{(0)}$ имеет полюсы s_e^p , ($e = 1 \dots n$) и нули s_e^z , ($e = 1 \dots m$). Предположим, что расположение полюсов и нулей при $X = X^{(0)}$ нарушает условия (8) - (9). Тогда для улучшения статических и динамических свойств проектируемой САУ зададим эталонную САУ расположением полюсов и нулей, удовлетворяющим требованиям на качество.

Пусть в качестве полюсов и нулей передаточной функции эталонной САУ выбраны: $\tilde{s}_e^p$, ($e = \overline{1, n}$) и $\tilde{s}_j^z$, ($j = \overline{1, m}$).

Тогда воспользовавшись известными формулами перехода от корней полинома к его коэффициентам, определим коэффициенты ПФ эталонной САУ, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \tilde{s}_e^z &= -\tilde{c}_{m-1} / \tilde{c}_m; & \sum_{e,j=1}^m \tilde{s}_e^z \cdot \tilde{s}_j^z &= \tilde{c}_{m-2} / \tilde{c}_m; \dots; \prod_{e=1}^m \tilde{s}_e^z = (-1)^m \cdot \tilde{c}_0 / \tilde{c}_m; \\ \sum_{e=1}^n \tilde{s}_e^p &= -\tilde{d}_{n-1} / \tilde{d}_n; & \sum_{e,j=1}^n \tilde{s}_e^p \cdot \tilde{s}_j^p &= \tilde{d}_{n-2} / \tilde{d}_n; \dots; \prod_{e=1}^n \tilde{s}_e^p = (-1)^n \cdot \tilde{d}_0 / \tilde{d}_n; \end{aligned}$$

где $\tilde{c}_e$ и $\tilde{d}_e$ - соответственно коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции эталонной САУ, то есть коэффициенты полиномов

$\tilde{C}(s)$ и $\tilde{D}(s)$. Используя полученные результаты, запишем выражение передаточной функции эталонной САУ в виде

$$\tilde{W}(s) = \sum_{e=0}^m \tilde{c}_e s^e / \left(\sum_{e=0}^n \tilde{d}_e s^e \right)$$

Для приближения проектируемой САУ к эталонной достаточно воспользоваться приближением коэффициентов их передаточных функций.

Такое приближение реализуется за счет минимизации целевой функции, представляющей собой средне – квадратичную ошибку аппроксимации.

$$F(X) = 1/2 \left\{ \sum_{e=0}^m [c_e(x) - \tilde{c}_e]^2 + \sum_{e=0}^n [d_e(x) - \tilde{d}_e]^2 \right\} \rightarrow \min.$$

Покажем изложенное на примере синтеза САУ для объекта, заданного своей ПФ вида: $W^{ov}(s) = \frac{s+1}{s^2+5s-1}$.

Учитывая степень ПФ объекта управления, зададим ПФ устройства управления в виде $W^{vy}(X, s) = \frac{x_2 s + x_1}{s + x_3}$. Здесь степень полинома знаменателя ПФ устройства управления на единицу меньше

степени полинома знаменателя ПФ объекта управления, т.к. обычно меньшей степени на 1 бывает достаточно для обеспечения качества управления, учитывая замкнутый контур управления с единичной отрицательной обратной связью.

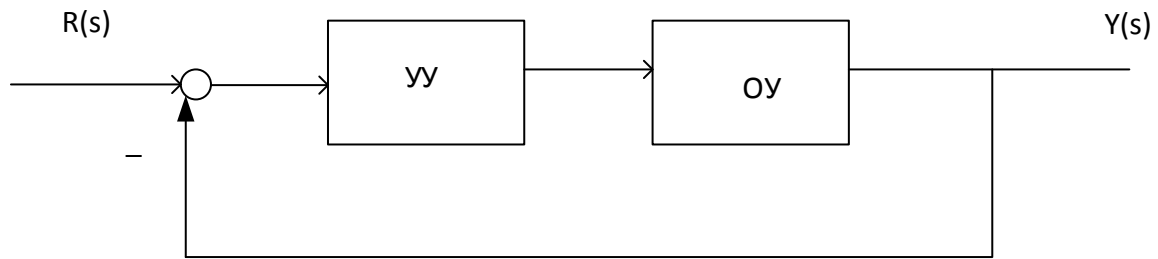


Рис. 1. Схема одномерной САУ.

Вычислим ПФ разомкнутой и замкнутой САУ:

$$W^{раз.}(X, s) = \frac{x_2 s + x_1}{s + x_3} \cdot \frac{s + 1}{s^2 + 5s - 1} = \frac{x_2 s^2 + (x_1 + x_2)s + x_1}{s^3 + (5 + x_3)s^2 + (5x_3 - 1)s - x_3}$$

$$W_{САУ}(X, s) = \frac{x_2 s^2 + (x_1 + x_2)s + x_1}{s^3 + (5 + x_2 + x_3)s^2 + (5x_3 + x_1 + x_2 - 1)s + x_1 - x_3}.$$

Для нахождения параметров вектора X воспользуемся заданием эталонной САУ через расположение полюсов, при котором будут выполняться заданные требования на качество управления динамикой процессов, а именно: степень устойчивости $\eta \geq 1$, показатель колебательности $\mu \leq 1$, время регулирования ≤ 2 сек.

Для этого зададим эталонные корни полинома третьей степени: $\tilde{s}_1 = -1$; $\tilde{s}_2 = -2$; $\tilde{s}_3 = -3$, при которых характеристики качества соблюдаются. Полином знаменателя ПФ эталонной САУ примет вид:

$$\tilde{D}(S) = (S + 1) \cdot (S + 2) \cdot (S + 3) = S^3 + 6S^2 + 11S + 6.$$

Составим целевую функцию в виде среднеквадратичной ошибки аппроксимации полинома знаменателя ПФ проектируемой САУ и полиномом знаменателя эталонной САУ для поиска оптимальных параметров устройства управления:

$$F(X) = 1/2 \{ [5 + x_2 + x_3 - 6]^2 + [5x_3 + x_1 + x_2 - 1 - 11]^2 + [x_1 - x_3 - 6]^2 \} \rightarrow \min.$$

Эта функция положительная квадратичная. Ее минимум равен нулю, при равенстве нулю всех слагаемых, т.е. можно составить систему уравнений вида:

$$5 + x_2 + x_3 - 6 = 0$$

$$5x_3 + x_1 + x_2 - 1 - 11 = 0$$

$$x_1 - x_3 - 6 = 0.$$

Имеем три линейных уравнений и 3 неизвестных. Решение системы уравнений дает значения неизвестных: $X_1 = 7$; $X_2 = 0$; $X_3 = 1$, которые будем считать оптимальными. Подставим эти значения в ПФ САУ, получим:

$$W_{САУ}(s) = \frac{7s + 7}{s^3 + (5 + 1)s^2 + (5 + 7 - 1)s + 7 - 1} = \frac{7s + 7}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}.$$

Коэффициенты полинома знаменателя смоделированной САУ в точности совпадают с коэффициентами полинома эталонной САУ с характеристиками: степень устойчивости $\eta = 1$, показатель колебательности $\mu = 0$, время регулирования $T_{рег.} = 1,6$ сек, демпфирование = 100%. При этом статическая ошибка составила 0,16.

Если эталонные корни (полюсы) задать не действительными, а комплексными числами внутри области качества Ω , можно значительно сократить время переходного процесса.

Для обобщения рассмотренной процедуры синтеза САУ на многомерный случай нужно использовать вместо ПФ объекта его передаточную матрицу. В остальном все действия по синтезу многомерного УУ будут аналогичны изложенным по каналам вход – выход и последующим объединением в каналы входы – выход.

Список литературы

1. *Прохорова О.В.* Оптимизация многомерных систем автоматического управления на основе модификации метода корневого годографа. Автореферат. - Москва: МИЭМ, 1998. -30 с.
2. *Прохорова О.В.* Оптимизация и синтез многомерных САУ на основе моделирования процессов в s -области. Монография. - Москва: АПКИППРО, 2010. - 158 с.
3. *Прохорова О.В., Орлов С.П.* Параметрическая оптимизация систем автоматического управления при задании эталонной САУ корневым годографом или расположением полюсов и нулей. // IEEE II International Conference on Control in Technical Systems (CTS), (25-27 Oct. 2017, SPbGTU LETI). IEEE Conference Publications, IEEE Xplore, 2017. P. 16-19.
4. *Прохорова О.В.* Синтез структуры управляющего устройства заданным объектом на основе моделирования процессов в комплексной плоскости. // Научный журнал №2(67), 2023. – С. 4 - 9.
5. *Прохорова О.В.* Синтез многомерной САУ изотермическим химическим реактором. // Научный журнал №4(71), 2024. – С. 4 - 13.